

# 鹰潭市 2023 届高三第一次模拟考试 数学试题(文科)

命题人：[ ] 余江一中      审题人：[ ] 贵溪一中

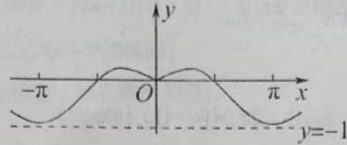
## 第 I 卷

一、单选题：本大题 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 3\}$ ，集合  $B = \{x | -2 < x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ ，则  $A \cap B = ( \quad )$   
 A.  $\{-1\}$       B.  $\{-1, 0, 1\}$       C.  $\{0, 1, 2\}$       D.  $\{-1, 0\}$
2. 已知复数  $z$  满足： $(1-i) \cdot z = 1+i$  则  $\bar{z}$  的虚部等于  $( \quad )$   
 A. 1      B.  $i$       C.  $-1$       D.  $-i$
3. 在  $\triangle ABC$  中，D 为线段 BC 上一点，且  $\overline{BD} = 3\overline{DC}$ ， $\overline{AD} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$ ，则  $m - n = ( \quad )$   
 A. 2      B. 0.5      C. -0.5      D. -2
4. 如图是某赛季甲、乙两名篮球运动员 5 场比赛得分的茎叶图，已知甲的成绩的极差为 31，乙的成绩的平均值为 24，则下列结论错误的是  $( \quad )$   
 A.  $x = 9$   
 B.  $y = 6$   
 C. 乙的成绩的中位数为 28  
 D. 乙的成绩的方差小于甲的成绩的方差
5. 已知的  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  图象向左平移  $\varphi$  个单位长度后，得到函数  $g(x)$  的图象，且  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称，则  $|\varphi|$  的最小值为  $( \quad )$   
 A.  $\frac{\pi}{12}$       B.  $\frac{\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{12}$
6. 已知抛物线  $y^2 = 18x$  的焦点为  $F$ ，准线为  $l$ ，点  $P$  为  $C$  上一点，过  $P$  作  $l$  的垂线，垂足为  $A$ ，若  $AF$  的倾斜角为  $150^\circ$ ，则  $|PF| = ( \quad )$   
 A. 6      B. 5      C. 4      D. 3
7. 已知  $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，则  $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = ( \quad )$   
 A.  $\frac{47}{50}$       B.  $-\frac{47}{50}$       C.  $-\frac{41}{50}$       D.  $\frac{41}{50}$
8. 使  $p: \forall x > 0, x + \frac{4}{x} \geq a$  的否定为假命题的一个充分不必要条件是  $( \quad )$   
 A.  $a \geq 4$       B.  $a \leq 4$       C.  $a \geq 2$       D.  $a \leq 2$

甲	乙
8 0	
3 1	2
8 2	5 6 y
x 2	3 1

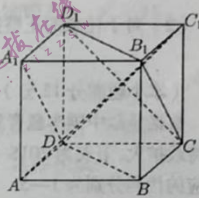
9. 函数  $f(x)$  的部分图象如图所示, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )



- A.  $f(x) = \frac{3x \sin x}{1+2x^2}$     B.  $f(x) = \frac{x^3 \sin x}{1+x^2}$     C.  $f(x) = \frac{3x^2 \cos x}{1+2x^2}$     D.  $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{1+x^2}$

10. 如图,  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  为正方体, 下列错误的是 ( )

- A.  $BD \parallel$  平面  $CB_1D_1$   
 B. 平面  $ADC_1 \perp$  平面  $CB_1D_1$ .  
 C.  $D_1C$  与  $AC_1$  共面  
 D. 异面直线  $A_1D$  与  $AC_1$  所成的角为  $90^\circ$



11. 3D打印是快速成型技术的一种, 它是一种以数字模型文件为基础, 运用粉末状金属或塑料等可粘合材料, 通过逐层打印的方式来构造物体的技术, 如图所示的塔筒为3D打印的双曲线型塔筒, 该塔筒是由离心率为  $\sqrt{10}$  的双曲线的一部分围绕其旋转轴逐层旋转打印得到的, 已知该塔筒(数据均以壁厚即塔筒外侧表面计算)的上底直径为4cm, 下底直径为6cm, 高为9cm, 则喉部(最细处)的直径为 ( )



- A.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  cm    B.  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$  cm    C.  $2\sqrt{2}$  cm    D.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  cm

12. 若函数  $f(x) = \frac{\ln x + 1 - mx^2}{x}$  有两个零点  $a, b$ , 且存在唯一的整数  $x_0 \in (a, b)$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, \frac{e}{2})$     B.  $[\frac{\ln 2e}{4}, 1]$     C.  $[\frac{\ln 2e}{4}, 1)$     D.  $[\frac{\ln 3e}{9}, \frac{e}{2})$

## 第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 观察下列等式:  $1^3 + 2^3 = 3^2, 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2, 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$ , 根据上述规律写出第九个等式为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + b^2x + 1$ , 若  $a$  是从 1, 2, 3 三个数中任取的一个数,  $b$  是从 1, 2 两个数中任取的一个数, 则该函数有两个极值点的概率为\_\_\_\_\_.

15.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $3b \cos C + 3c \cos B = 5a \sin A$ , 且  $A$  为锐角, 则当  $\frac{a^2}{bc}$  取得最小值时,  $\frac{a}{2b+c}$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是菱形, 其侧面积是  $8\sqrt{2}$ , 若该直四棱柱有外接球, 则该外接球的表面积的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题 (共 80 分)

17. (本小题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1$ ,  $2S_n=(n+1)a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 对于任意的正整数  $n$ ,  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^a, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

18. (本小题满分 12 分)

数据显示中国车载音乐已步入快速发展期, 随着车载音乐的商业化模式进一步完善, 市场将持续扩大, 下表为 2018—2022 年中国车载音乐市场规模 (单位: 十亿元), 其中年份 2018—2022 对应的代码分别为 1—5.

年份代码 $x$	1	2	3	4	5
车载音乐市场规模 $y$	2.8	3.9	7.3	12.0	17.0

(1) 由上表数据知, 可用指数函数模型  $y=a \cdot b^x$  拟合  $y$  与  $x$  的关系, 请建立  $y$  关于  $x$  的回归方程 ( $a, b$  的值精确到 0.1);

(2) 综合考虑 2023 年及 2024 年的经济环境及疫情等因素, 某预测公司根据上述数据求得  $y$  关于  $x$  的回归方程后, 通过修正, 把  $b-1.3$  作为 2023 年与 2024 年这两年的年平均增长率, 请根据 2022 年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测 2024 年的中国车载音乐市场规模.

参考数据:

$\bar{v}$	$\sum_{i=1}^5 x_i v_i$	$e^{0.524}$	$e^{0.472}$
1.94	33.82	1.7	1.6

其中  $v_i = \ln y_i$ ,  $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$ .

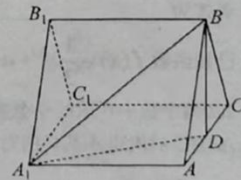
参考公式: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = \hat{a} - \hat{\beta}u$  的斜率

和截距的最小二乘法估计公式分别为  $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$ .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的所有棱长都是 2,  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $D$  是  $AC$  的中点.

- (1) 证明:  $BD \perp$  平面  $A_1ACC_1$ ;
- (2) 求异面直线  $B_1C_1$  与  $A_1D$  所成角的余弦值;
- (3) 求点  $B_1$  到平面  $A_1BD$  的距离.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = m(2x+1)$  ( $m \neq 0$ ) ( $e$  为自然对数的底数),  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

(I) 若  $m = e$ , 求函数  $h(x)$  的单调区间;

(II) 若  $h(x) \geq 1 - m$  恒成立, 求实数  $m$  的值;

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $G$  的中心在原点  $O$ , 对称轴为坐标轴且焦点在  $x$  轴上, 抛物线  $M: y^2 = 8x$ , 若抛物线  $M$  的焦点在椭圆  $G$  上, 且椭圆  $G$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ .

(1) 求椭圆  $G$  的方程;

(2) 已知斜率存在且不为零的直线  $l$  满足: 与椭圆  $G$  相交于不同两点  $A, B$ , 与直线  $x+4=0$  相交于点  $Q$ . 若椭圆  $G$  上一动点  $P$  满足:  $AO \parallel PB$ ,  $BO \parallel PA$ , 且存在点  $T(x_0, 0)$ , 使得  $\overline{OP} \cdot \overline{TQ}$  恒为定值  $\frac{3}{2}$ , 求  $x_0$  的值.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) (选修 4-4: 极坐标与参数方程)

在直角坐标系中, 以原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线  $C: \rho = 4\cos\theta$ , 直线  $l$  的参数方程为:  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 直线  $l$  与曲线  $C$  分别交于  $M, N$  两点.

(1) 写出曲线  $C$  和直线  $l$  的普通方程;

(2) 若点  $P(3, -1)$ , 求  $\left| \frac{1}{|PM|} - \frac{1}{|PN|} \right|$  的值.

23. (本小题满分 10 分) (选修 4-5: 不等式选讲)

已知关于  $x$  的不等式  $|x+1| \geq |x-2| + |t-3|$  有解.

(1) 求实数  $t$  的最大值  $M$ ;

(2) 在 (1) 的条件下, 已知  $a, b, c$  为正数, 且  $abc = 2\sqrt{3}M$ , 求  $(a+b)^2 + c^2$  的最小值.