南京市2023届高三年级学情调研

数学

2022.09

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．

1 设集合 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$， $B=\{x|x+1>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-3,-1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

2. 已知复数 $z=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}$，其中i为叙述单位，则 $z\bar{z}$ 的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

3. 已知随机变量 $X\sim N(4,2^2)$，则 $P(8<X<10)$ 的值约为（　　）

附：若 $Y\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Y<\mu+\sigma)\approx0.6827$， $P(\mu-2\sigma<Y<\mu+2\sigma)\approx0.9545$，

$P(\mu-3\sigma<Y<\mu+3\sigma)\approx0.9974$

A. 0.0215　　B. 0.1359　　C. 0.8186　　D. 0.9760

4. 若直线 $x+y+a=0$ 与曲线 $y=x-2\ln x$ 相切，则实数 a 的值为（　　）

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. -3

5. 阻尼器是一种以提供阻力达到减震效果的专业工程装置．我国第一高楼上海中心大厦的阻尼器减震装置，被称为“镇楼神器”，如图1由物理学知识可知，某阻尼器的运动过程可近似为单摆运动，其离开平衡位置的位移 y(m)和时间 t(s)的函数关系为 $y=\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，如图2，若该阻尼器在摆动过程中连续三次到达同一位置的时间分别为 t_1， t_2， $t_3(0<t_1<t_2<t_3)$，且 $t_1+t_2=2$， $t_2+t_3=6$，则在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于0.5m的总时间为（　　）

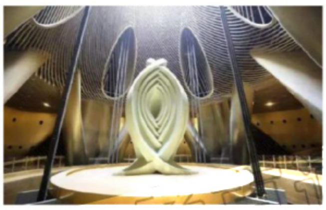


图1

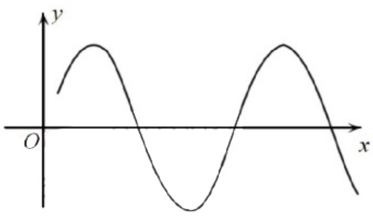


图2

A. $\frac{1}{3}$s　　B. $\frac{2}{3}$s　　C. 1s　　D. $\frac{4}{3}$s

6. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别$F_1,F_2$，左顶点为$A$，上顶点为$B$，点$P$为椭圆上一点，且$PF_2\perp F_1F_2$，若$AB//PF_1$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知圆柱的轴截面是边长为2的正方形，P为上底面圆的圆心，AB为下底面圆的直径，E为下底面圆周上一点，则三棱锥P-ABE外接球的表面积为（　　）

A. $\frac{25}{16}\pi$　　B. $\frac{25}{4}\pi$　　C. $\frac{5}{2}\pi$　　D. 5π

8. 已知函数$f(x)$，任意x，$y\in R$，满足$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，且$f(1)=2$，$f(2)=0$，则$f(1)+f(2)+\cdots+f(90)$的值为（　　）

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上全部选对得5分，部分选对得2分，不选或有错选的得0分．

9. 已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列选项中，$l\perp m$的充分条件有（　　）

A. $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m//\beta$　　B. $\alpha//\beta,l//\alpha,m\perp\beta$

C. $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m\perp\beta$　　D. $\alpha\perp\beta,l//\alpha,m//\beta$

10. 已知$a>b>0$，则（　　）

A. $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　　B. $a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$

C. $a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)$　　D. $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

11. 已知直线$l:x+1=0$，点$P(1,0)$，圆心为M的动圆经过点P，且与直线l相切，则（　　）

A. 点M的轨迹为抛物线

B. 圆M面积最小值为4π

C. 当圆M被y轴截得的弦长为$2\sqrt{5}$时，圆M的半径为3

D. 存在点M，使得$\dfrac{MO}{MP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，其中$O$为坐标原点

12. 已知函数$f\left(x\right)=3^x-2^x$，$x\in R$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增

B. 存在$a\in R$，使得函数$y=\dfrac{f\left(x\right)}{a^x}$为奇函数

C. 函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)+x$有且仅有2个零点

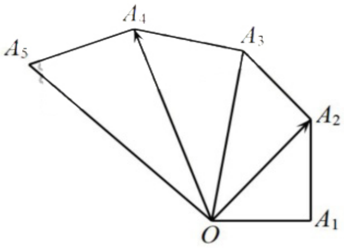
D. 任意$x\in \mathbf{R}$，$f\left(x\right)>-1$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. $(1-\dfrac{1}{x^2})(1+x)^6$展开式中$x^3$的系数为__________.

14. 双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$右焦点为F，点P，Q在双曲线上，且关于原点O对称．若$PF\perp QF$，则$\triangle PQF$的面积为______________.

15. 如图是构造无理数的一种方法：线段$OA_1=1$；第一步，以线段OA_1为直角边作直角三角形OA_1A_2，其中$A_1A_2=1$；第二步，以OA_2为直角边作直角三角形OA_2A_3，其中$A_2A_3=1$；第三步，以OA_3为直角边作直角三角形OA_3A_4，其中$A_3A_4=1$；...，如此延续下去，可以得到长度为无理数的一系列线段，如OA_2，OA_3，...，则$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=$____________.



16. 若函数$f\left(x\right)=2x-\sin x-a$在$\left(-\pi,\pi\right)$上存在唯一的零点$x_1$，函数$g\left(x\right)=x^2+\cos x-ax+a$在$\left(-\pi,\pi\right)$上存在唯一的零点$x_2$，且$x_1<x_2$，则实数$a$的取值范围为_____________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．请在答题-卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle ABD=45°$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$，对角线AC与BD交于点E，且$AE=EC$，$DE=2BE$.

（1）求BD的长；

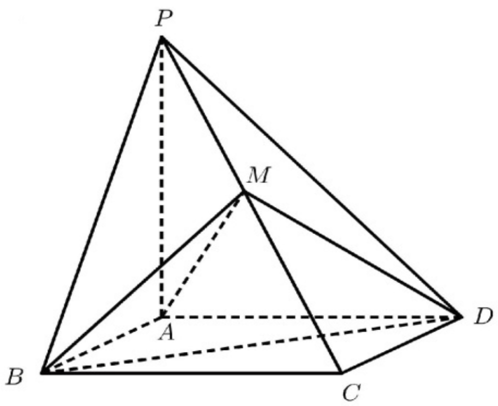
（2）求$\cos\angle ADC$的值.

18. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=6$，$a_2=12$，$a_3=20$，且数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，$n\in\mathrm{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，证明：$S_n<\dfrac{1}{2}$

19. 如图，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$PA\perp$平面$ABCD$，M为PC中点.



（1）求证：$PA\,//$平面MBD;

（2）若$AB=AD=PA=2$，$\angle BAD=120°$，求二面角$B\text{-}AM\text{-}D$的正弦值.

20. 某高校男、女学生人数基本相当，为了解该校英语四级考试情况，随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各50名学生的成绩，情况如下表:

	合格	不合格
男生	35	15
女生	45	5

（1）是否有99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关?

（2）从这50名男生中任意选2人，求这2人中合格人数ξ的概率分布及数学期望;

（3）将抽取的这100名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率．若学生首次考试不合格，则经过一段时间的努力，第二次参加考试合格的概率会增加0.1．现从该校学生中任意抽取2名学生，求至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率.

参考公式和数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

南京市2023届高三年级学情调研

数学

2022.09

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．

1. 设集合 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{x|x+1>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-3,-1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据集合的基本运算进行计算即可.

【详解】解：由 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，得 $A=(-3,2)$，

由 $B=\{x|x+1>0\}$，得 $B=(-1,+\infty)$，

所以 $A\cap B=(-1,2)$.

故选：B.

2. 已知复数 $z=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}$，其中 i 为叙述单位，则 $z\bar{z}$ 的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的乘法运算化简复数 z 求解.

【详解】解：因为复数 $z=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}=-1+2\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=-1-2\mathrm{i}$，

则 $z\bar{z}=(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})=5$，

故选：D

3. 已知随机变量 $X\sim N(4,2^2)$，则 $P(8<X<10)$ 的值约为（　　）

附：若 $Y\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Y<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Y<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，

$P(\mu-3\sigma<Y<\mu+3\sigma)\approx 0.9974$

A. 0.0215　　B. 0.1359　　C. 0.8186　　D. 0.9760

【答案】A

【解析】

【分析】由题意确定 $\mu=4,\sigma=2$，根据

$P(8<X<10)=\frac{1}{2}[P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)-P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)]$，即可得答案.

【详解】由题意知随机变量 $X\sim N(4,2^2)$，故 $\mu=4,\sigma=2$，

故 $P(8<X<10)=\frac{1}{2}[P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)-P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)]$

$\approx\frac{1}{2}(0.9974-0.9545)=0.02145\approx0.0215$，

故选：A

4. 若直线 $x+y+a=0$ 与曲线 $y=x-2\ln x$ 相切，则实数 a 的值为（　　）

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. -3

【答案】C

【解析】

【分析】设切点，根据已知求解切点坐标，代入切线方程求出 a 的值即可.

【详解】解：设直线与曲线的切点 $P(x_0,y_0)$，

由于直线 $x+y+a=0$ 斜率为 -1，则 $y'|_{x=x_0}=-1$，

又 $y'=1-\frac{2}{x}$，　所以 $1-\frac{2}{x_0}=-1$，得 $x_0=1$，所以 $y_0=1-2\ln1=1$

则切点为 $(1,1)$，切线方程为 $y=-(x-1)+1$，所以 $a=-2$.

故选：C.

5. 阻尼器是一种以提供阻力达到减震效果的专业工程装置. 我国第一高楼上海中心大厦的阻尼器减震装置，被称为“镇楼神器”，如图1由物理学知识可知，某阻尼器的运动过程可近似为单摆运动，其离开平衡位置的位移 y(m)和时间 t(s)的函数关系为 $y=\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，如图2，若该阻尼器在摆动过程中连续三次到达同一位置的时间分别为 t_1，t_2，$t_3(0<t_1<t_2<t_3)$，且 $t_1+t_2=2$，$t_2+t_3=6$，则在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于0.5m的总时间为　（　　）

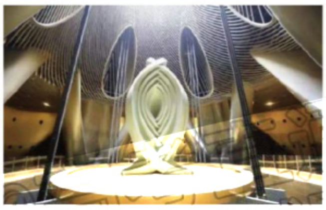


图1

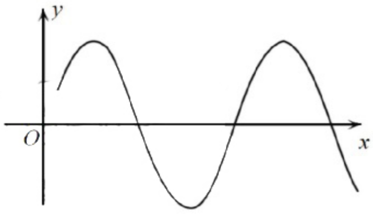


图2

A. $\frac{1}{3}$s　　B. $\frac{2}{3}$s　　C. 1s　　D. $\frac{4}{3}$s

【答案】D

【解析】

【分析】由条件确定函数 $y=\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期，再由周期公式求 ω，再由条件关系列不等式求一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于 0.5m 的总时间.

【详解】因为 $t_1+t_2=2$，$t_2+t_3=6$，$t_3-t_1=T$

所以 $T=4$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{2}$，

所以 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\varphi\right)$，

由 $y>0.5$ 可得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\varphi\right)>0.5$，

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}t+\varphi<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，$4k+\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi<t<\frac{5}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi+4k,k\in Z$，

$\left(4k+\frac{5}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi\right)-\left(4k+\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi\right)=\frac{4}{3}$，

所以在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于 0.5m 的总时间为 $\frac{4}{3}$s.

故选：D.

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别 F_1,F_2，左顶点为 A，上顶点为 B，点 P 为椭圆上一点，且 $PF_2\perp F_1F_2$，若 $AB//PF_1$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先根据题意得到$P\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，根据$AB//PF_1$得到$b=2c$，再计算离心率即可.

【详解】由题知：$P\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，因为$AB//PF_1$，

所以$\dfrac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\dfrac{b}{a}$，整理得$b=2c$，

所以$b^2=4c^2=a^2-c^2$，得$e^2=\dfrac{1}{5}$，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：A

7. 已知圆柱的轴截面是边长为2的正方形，P为上底面圆的圆心，AB为下底面圆的直径，E为下底面圆周上一点，则三棱锥P-ABE外接球的表面积为（　　）

A. $\dfrac{25}{16}\pi$　　B. $\dfrac{25}{4}\pi$　　C. $\dfrac{5}{2}\pi$　　D. 5π

【答案】B

【解析】

【分析】设外接球半径为R，底面圆心为Q，外接球球心为O，由外接球的定义，结合圆柱的几何性质，确定球心在线段PQ上，即可在直角三角形APQ上根据几何关系求出外接球半径，即可由公式算球表面积

【详解】由题，由圆的性质，$\triangle ABE$为直角三角形，$\angle E=90^\circ$，

如图所示，设外接球半径为R，底面圆心为Q，外接球球心为O，

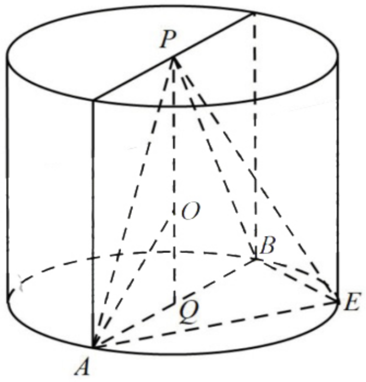
由外接球的定义，$OP=OA=OB=OE=R$，易得O在线段PQ上，

又圆柱的轴截面是边长为2的正方形，所以底面圆半径$AQ=BQ=1$，

$\because PQ\perp AQ$，则$OA^2=OQ^2+AQ^2\Rightarrow R^2=(2-R)^2+1^2$，解得$R=\dfrac{5}{4}$，

$\therefore$外接球表面积为$4\pi R^2=\dfrac{25\pi}{4}$.

故选：B.



8. 已知函数 $f(x)$，任意 x，$y\in R$，满足 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，且 $f(1)=2$，$f(2)=0$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)$ 的值为（　　）

A. -2　　　　B. 0　　　　C. 2　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】抽象函数利用特殊值的思路可以得到函数 $f(x)$ 在取奇数和偶数的时候的规律，然后可以得到函数值的和.

【详解】令 $x=2$，$y=1$，则 $f(3)f(1)=f^2(2)-f^2(1)$，所以 $f(3)=-2$；

令 $x=3$，$y=2$，则 $f(5)f(1)=f^2(3)-f^2(2)=4$，所以 $f(5)=2$；

令 $y=2$，则 $f(x+2)f(x-2)=f^2(x)$，所以 $f(7)=-2$，$f(9)=2$

$f(2k+1)=(-1)^k\cdot 2(k\in Z)$.

令 $x=3$，$y=1$，则 $f(4)f(2)=0$①，令 $x=4$，$y=2$，则 $f(6)f(2)=f^2(4)$②，

令 $x=5$，$y=1$，则 $f(6)f(4)=0$③，

假设 $f(4)\neq 0$，那么由③可知 $f(6)=0$，将 $f(2)=0$，$f(6)=0$ 代入②式发现与 $f(4)\neq 0$ 矛盾，所以 $f(4)\neq 0$ 不成立，$f(4)=0$.

同理可得当 x 为偶数时，$f(x)=0$.

所以原式 $=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(89)=2$.

故选：C.

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，不选或有错选的得 0 分．

9. 已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列选项中，$l\perp m$的充分条件有（　　）

A. $\alpha\perp\beta, l\perp\alpha, m/\!/\beta$　　B. $\alpha/\!/\beta, l/\!/\alpha, m\perp\beta$

C. $\alpha\perp\beta, l\perp\alpha, m\perp\beta$　　D. $\alpha\perp\beta, l/\!/\alpha, m/\!/\beta$

【答案】BC

【解析】

【分析】本题寻求线线垂直的条件，对四个选项中的条件进行逐一进行判断，验证它们能否推出线线垂直，从而选出正确选项．

【详解】解：A 选项不是$l\perp m$的一个充分条件，两个平面垂直，两条直线分别平行和垂直于平面，直线可能垂直，可能平行或异面，故 A 错误；

B 选项因为$m\perp\beta$，且$\alpha/\!/\beta$，所以$m\perp\alpha$，又因为$l/\!/\alpha$，所以$l\perp m$，故 B 正确；

C 选项因为$m\perp\beta$，$l\perp\alpha$，又因为$\alpha\perp\beta$，所以$l\perp m$，故 C 正确；

D 选项不是$l\perp m$的一个充分条件，两个平面垂直，两条直线分别平行于平面，直线可能垂直，可能平行或异面，故 D 错误；

故选：BC．

10. 已知$a>b>0$，则（　　）

A. $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　　B. $a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$

C. $a^3-b^3>2\left(a^2b-ab^2\right)$　　D. $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

【答案】AC

【解析】

【分析】对 A，对$a>b$两边同除ab化简即可判断；

对 B，对不等式移项进行因式分解得$(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)>0$，即可进一步判断$1-\frac{1}{ab}$的符号不确定，即可判断；

对 C，对不等式移项进行因式分解得$(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)>0$，由$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab$即可判断；

对 D，对不等式移项进行根式运算得 $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b}}$，即可进一步判断

【详解】对 A，$a>b>0\Rightarrow\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}\Rightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，A 正确；

对 B，$a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}\Leftrightarrow a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\Leftrightarrow(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)>0$，$\because a-b>0$，$\therefore 1-\frac{1}{ab}>0\Leftrightarrow ab>1$，

不等式不一定成立，B 错误；

对 C，$a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)\Leftrightarrow(a-b)(a^2-ab+b^2)>0$，$\because a-b>0$，

$\therefore a^2+b^2-ab>0\Leftrightarrow(a-b)^2+ab>0$，不等式成立，C 正确；

对 D，$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a+1}-\sqrt{a}>\sqrt{b+1}-\sqrt{b}$，所以

$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b}}\Leftrightarrow\sqrt{b+1}+\sqrt{b}>\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，不等式不成立，D 错误；

故选：AC.

11. 已知直线 $l:x+1=0$，点 $P(1,0)$，圆心为 M 的动圆经过点 P，且与直线 l 相切，则（　　）

A. 点 M 的轨迹为抛物线

B. 圆 M 面积最小值为 4π

C. 当圆 M 被 y 轴截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ 时，圆 M 的半径为 3

D. 存在点 M，使得 $\frac{MO}{MP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，其中 O 为坐标原点

【答案】ACD

【解析】

【分析】由抛物线定义可知 A 正确；由抛物线性质可知当 M 为坐标原点时，圆 M 面积最小，可知 B 错误；设 $M(x,y)$，利用垂径定理可构造方程求得 x，由此可得圆的半径，知 C 正确；设存在点 $M\left(\frac{y^2}{4},y\right)$，由 $\left(\frac{MO}{MP}\right)^2=\frac{4}{3}$ 可求得点 M 坐标，知 D 正确.

【详解】对于 A，由题意知：点 M 到点 P 与到定直线 l 的距离相等，且点 P 不在直线 l 上，符合抛物线定义，

$\therefore$ 点 M 的轨迹为抛物线，A 正确；

对于 B，由 A 知，点 M 的轨迹为抛物线，则当 M 为坐标原点时，点 M 到直线 l 距离最小，即此时圆 M 的

半径最小，即 $r_{\min}=1$，$\therefore$ 圆 M 面积的最小值为 π，B 错误；

对于 C，由 A 得：点 M 的轨迹方程为 $y^2=4x$，设 $M(x,y)$，则圆 M 的半径 $r=x+1$，点 M 到 y 轴的距离 $d=x$，$\therefore 2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{(x+1)^2-x^2}=2\sqrt{5}$，解得：$x=2$，

$\therefore$ 圆 M 的半径 $r=x+1=3$，C 正确；

对于 D，假设存在点 M，使得 $\dfrac{MO}{MP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

设 $M\left(\dfrac{y^2}{4},y\right)$，则 $\left(\dfrac{MO}{MP}\right)^2=\dfrac{\dfrac{y^4}{16}+y^2}{\left(\dfrac{y^2}{4}-1\right)^2+y^2}=\dfrac{4}{3}$，整理可得：$y^4-16y^2+64=0$，

解得：$y^2=8$，$\therefore y=\pm2\sqrt{2}$，$\therefore M\left(2,2\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(2,-2\sqrt{2}\right)$，D 正确.

故选：ACD.

12. 已知函数 $f(x)=3^x-2^x$，$x\in R$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. 存在 $a\in R$，使得函数 $y=\dfrac{f(x)}{a^x}$ 为奇函数

C 函数 $g(x)=f(x)+x$ 有且仅有 2 个零点

D. 任意 $x\in \mathbf{R}$，$f(x)>-1$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项求导以后判断导函数的正负即可得出结论；B 结合奇偶性的定义即可判断；C 结合函数的正负即可得出结论，利用放缩法即可得出结论.

【详解】A：$f'(x)=3^x\ln3-2^x\ln2=2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ln3-\ln2\right]$

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $2^x>1$，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>1$，因此 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ln3>\ln3>\ln2$，故 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确；

B：令 $a=\sqrt{6}$，则 $y=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x$，令 $g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x$，定义域为 R，关于原点对称，且

$g(-x)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-x}-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^{-x}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x=-g(x)$，故 $g(x)$ 为奇函数，B 正确

C: $x=0$ 时，$g(x)=0$，$x>0$ 时，$g(x)=2^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right]>0$，$x<0$ 时，$g(x)=2^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right]<0$，

所以 $g(x)$ 只有 1 个零点，C 错误；

D: $x>0$ 时，$f(x)>0$；$x=0$ 时，$f(x)=0$；$x<0$ 时，$f(x)>-2^x>-1$；D 正确；

故选：ABD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. $(1-\frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为__________.

【答案】14.

【解析】

【详解】$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6=(1+x)^6-\frac{1}{x^2}\cdot(1+x)^6$，在 $(1+x)^6$ 中，x^3 的项系数为 $C_6^3=20$，对 $\frac{1}{x^2}\cdot(1+x)^6$ 的 x^3 项系数为 $C_6^5=6$，$\therefore x^3$ 的系数为 $20-6=14$．

点睛：求二项展开式有关问题的常见类型及解题策略

(1) 求展开式中的特定项. 可依据条件写出第 $r+1$ 项，再由特定项的特点求出 r 值即可.

(2) 已知展开式的某项，求特定项的系数. 可由某项得出参数项，再由通项写出第 $r+1$ 项，由特定项得出 r 值，最后求出其参数.

14. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 右焦点为 F，点 P，Q 在双曲线上，且关于原点 O 对称．若 $PF\perp QF$，则 $\triangle PQF$ 的面积为______________.

【答案】4

【解析】

【分析】由条件 $PF\perp QF$ 根据直角三角形的性质可得 $|PQ|=2\sqrt{5}$，由双曲线的定义及对称性可得 $\left||PF|-|QF|\right|=2$，由此可求 $|PF|\cdot|QF|$，再求 $\triangle PQF$ 的面积即可.

【详解】因为双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，所以 $a=1$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，

设其左焦点为 F_1，右焦点 $F\left(\sqrt{5},0\right)$

因为 $PF\perp QF$，P,Q 关于原点 O 对称，

所以 $|PQ|=2|OF|=2\sqrt{5}$，

又由双曲线的对称性可得$|QF|=|PF_1|$，由双曲线的定义可得$||PF|-|PF_1||=2$，

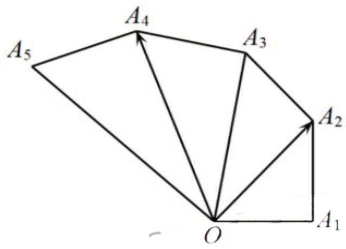
所以$||PF|-|QF||=2$，又$|PF|^2+|QF|^2=|PQ|^2=20$，

所以$|PF|\cdot|QF|=8$，

所以$S=\dfrac{1}{2}|PF|\cdot|QF|=4$，

故答案为：4.

15. 如图是构造无理数的一种方法： 线段$OA_1=1$； 第一步，以线段OA_1为直角边作直角三角形OA_1A_2，其中$A_1A_2=1$； 第二步，以OA_2为直角边作直角三角形OA_2A_3，其中$A_2A_3=1$； 第三步，以OA_3为直角边作直角三角形OA_3A_4， 其中$A_3A_4=1$； ...，如此延续下去，可以得到长度为无理数的一系列线段， 如OA_2， OA_3， ... ，则$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=$__________.



【答案】$2-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】由图求解$\angle A_2OA_3$，$\angle A_3OA_4$的余弦与正弦值，再由两角和差的余弦公式得$\cos\angle A_2OA_4$，利用数量积的定义求解$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}$即可.

【详解】解：由题可知$OA_2=\sqrt{2},OA_3=\sqrt{3},OA_4=\sqrt{4}=2$

所以$\cos\angle A_2OA_3=\dfrac{OA_2}{OA_3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， $\sin\angle A_2OA_3=\dfrac{A_2A_3}{OA_3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $\cos\angle A_3OA_4=\dfrac{OA_3}{OA_4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin\angle A_3OA_4=\dfrac{A_3A_4}{OA_4}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\cos\angle A_2OA_4=\cos(\angle A_2OA_3+\angle A_3OA_4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=\left|\overrightarrow{OA_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA_4}\right|\cdot\cos\angle A_2OA_4=\sqrt{2}\times2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=2-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$2-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. 若函数$f(x)=2x-\sin x-a$在$(-\pi,\pi)$上存在唯一的零点x_1，函数$g(x)=x^2+\cos x-ax+a$在$(-\pi,\pi)$上存在唯一的零点x_2，且$x_1<x_2$，则实数a的取值范围为__________.

【答案】$(-2\pi,1-\pi]$

【解析】

【分析】根据$f'(x)>0$可求得$f(x)$单调递增，得到$f(-\pi)<f(x_1)=0<f(\pi)$，可解得$-2\pi<a<2\pi$；由$g'(x)=f(x)$可知$g(x)$单调性，结合$x_1<x_2$可确定$\begin{cases}g(-\pi)\le0\\g(\pi)>0\end{cases}$，由此解得$a\le1-\pi$；取交集即可得到$a$的范围.

【详解】$\because f'(x)=2-\cos x>0$恒成立，$\therefore f(x)$单调递增，

又$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上存在唯一的零点x_1，$\therefore f(-\pi)<f(x_1)=0<f(\pi)$，

即$-2\pi-a<0<2\pi-a$，解得：$-2\pi<a<2\pi$；

$\because g'(x)=2x-\sin x-a=f(x)$，又$f(x_1)=0$，

$\therefore$当$x\in(-\pi,x_1)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(x_1,\pi)$时，$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$在$(-\pi,x_1)$上单调递减，在(x_1,π)上单调递增，

又$g(x_2)=0$，$x_1<x_2$，$\therefore g(-\pi)\le0$，$g(\pi)>0$，即$\begin{cases}\pi^2-1+a\pi+a\le0\\\pi^2-1-a\pi+a>0\end{cases}$，

解得：$a\le1-\pi$；

综上所述：实数a的取值范围为$(-2\pi,1-\pi]$.

故答案为：$(-2\pi,1-\pi]$.

【点睛】关键点点睛：本题考查根据函数零点求解参数范围的问题，解题关键是能够结合零点求得$f(x),g(x)$单调性，从而确定$f(x),g(x)$在区间端点处的符号，由此构造不等式组求得参数范围.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．请在答题-卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=45°$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$，对角线 AC 与 BD 交于点 E，且 $AE=EC$，$DE=2BE$.

（1）求 BD 的长；

（2）求 $\cos\angle ADC$ 的值.

【答案】（1）$3\sqrt{2}$

（2）$-\dfrac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1)由余弦定理解三角形 ABD 可求 BD；

(2)在 CED 中由余弦定理求 CD，再由正弦定理求 $\sin\angle EDC$，由此可求 $\cos\angle ADC$ 的值.

【小问 1 详解】

$\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABD$，

又 $\angle ABD=45°$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$，

所以 $18=36+BD^2-6\sqrt{2}BD$

解得 $BD=3\sqrt{2}$；

【小问 2 详解】

因为 $BD=3\sqrt{2}$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$，

所以 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $\angle ADB=90°$；

又 $DE=2BE$，所以 $DE=2\sqrt{2}$

AED 中，$AE^2=AD^2+DE^2=26$，所以 $AE=\sqrt{26}$

所以 $\cos\angle AED=\dfrac{ED}{AE}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，所以 $\cos\angle DEC=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，所以 $\sin\angle DEC=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$；

CED 中，由余弦定理可得 $CD^2=EC^2+ED^2-2EC\cdot ED\cos\angle DEC$，

又 $EC=AE=\sqrt{26}$，$DE=2\sqrt{2}$，$\cos\angle DEC=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，

所以 $CD^2=26+8-2\times\sqrt{26}\times2\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=50$

所以 $CD=5\sqrt{2}$，

由正弦定理可得 $\dfrac{EC}{\sin\angle EDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle DEC}$，所以 $\dfrac{\sqrt{26}}{\sin\angle EDC}=\dfrac{\frac{5\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{13}}$，

所以 $\sin\angle EDC=\dfrac{3}{5}$

所以 $\cos\angle ADC=\cos(90^\circ+\angle EDC)=-\sin\angle EDC=-\dfrac{3}{5}$

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=6$，$a_2=12$，$a_3=20$，且数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，$n\in N^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<\dfrac{1}{2}$

【答案】（1）$a_n=n^2+3n+2$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意可得 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的首项与公差，进而求得通项公式，再利用累加法求解即可；

（2）根据裂项相消求和证明即可.

【小问 1 详解】

$a_2-a_1=6$，$a_3-a_2=8$，所以 $n\geq 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=6+2(n-2)=2n+2$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

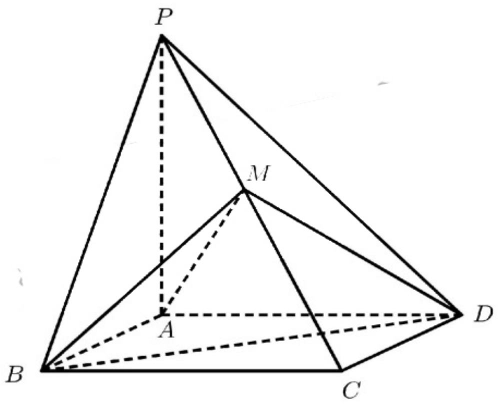
$=6+6+8\cdots+2n+2=6+\dfrac{(6+2n+2)(n-1)}{2}=6+(n+4)(n-1)$

$=n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$

【小问 2 详解】

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，所以 $S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{2}$

19. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，M 为 PC 中点.



（1）求证：PA∥平面 MBD；

（2）若 $AB=AD=PA=2$，$\angle BAD=120°$，求二面角 $B\text{-}AM\text{-}D$ 的正弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

【解析】

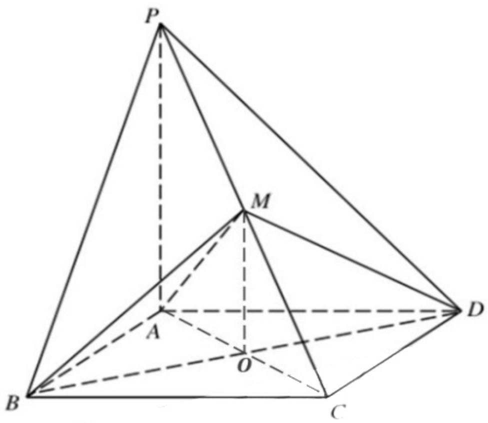
【分析】（1）根据线面平行的判定定理，结合中位线的性质，可得答案；

（2）根据题意，建立空间直角坐标系，得到对应点的坐标，求的两平面的法向量，由向量夹角的计算公式，可得答案．

【小问 1 详解】

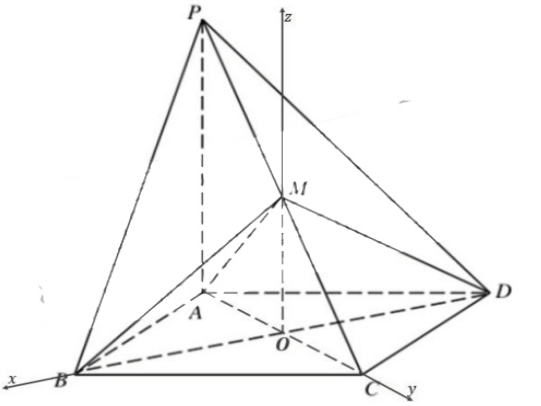
连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OM，可知 O 为 AC 中点，M 为 PC 中点，所以 OM∥PA，

且 $OM\subset$ 平面 MBD，$PA\not\subset$ 平面 MBD，所以 PA∥平面 MBD.



【小问 2 详解】

由题意可得平行四边形 $ABCD$ 为菱形，建立如图坐标系，如下图：



在菱形 $ABCD$，$\because AB=AD=2$，$\angle BAD=120°$，$\therefore AC=2, OB=\sqrt{3}$，

所以：$B\left(\sqrt{3},0,0\right),C\left(0,1,0\right),D\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，$A\left(0,-1,0\right),M\left(0,0,1\right)$

所以 $\overrightarrow{BA}=\left(-\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-\sqrt{3},0,1\right)$，$\overrightarrow{DA}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{DM}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

设平面 MBA 的法向量 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0\\-\sqrt{3}x+z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}x\\z=\sqrt{3}x\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}\\z=\sqrt{3}\end{cases}$ 则面 MBA 的法向量 $\vec{m}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

同理可得：平面 MDA 的法向量 $\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1-3-3}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{5}{7}$，所以 $\sin\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

故二面角 $B-AM-D$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

20. 某高校男、女学生人数基本相当，为了解该校英语四级考试情况，随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各 50 名学生的成绩，情况如下表：

	合格	不合格
男生	35	15
女生	45	5

（1）是否有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关？

（2）从这 50 名男生中任意选 2 人，求这 2 人中合格人数 ξ 的概率分布及数学期望；

（3）将抽取的这 100 名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率．若学生首次考试不合格，则经过一段时间的努力，第二次参加考试合格的概率会增加 0.1．现从该校学生中任意抽取 2 名学生，求至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率．

参考公式和数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

附表：

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）没有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关；

（2）分布列见解析；期望为$\dfrac{7}{5}$

（3）0.9604

【解析】

【分析】(1)由条件计算K^2，再比较其与临界值的大小，并作出判断；(2)由条件确定ξ的可能取值，再求其取各值的概率，由此可得其分布列，再由期望公式求其期望；(3)根据概率乘法公式和概率加法公式求对应事件的概率．

【小问 1 详解】

因为$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

又$a=35$，$b=15$，$c=45$，$d=5$，

所以$K^2=\dfrac{100(35\times5-45\times15)^2}{50\times50\times80\times20}=\dfrac{100}{16}=6.25$，

又$P(K^2\geq6.635)=0.01$，$6.635>6.25$，

所以没有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关；

【小问 2 详解】

由已知ξ的取值有 0，1，2，

$P(\xi=0)=\frac{C_{15}^{2}}{C_{50}^{2}}=\frac{3}{35}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{35}^{1}C_{15}^{1}}{C_{50}^{2}}=\frac{3}{7}$， $P(\xi=2)=\frac{C_{35}^{2}}{C_{50}^{2}}=\frac{17}{35}$，

所以ξ的概率分布为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{17}{35}$

所以$E(\xi)=0\times\frac{3}{35}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{17}{35}=\frac{7}{5}$；

【小问 3 详解】

由已知该校学生首次参加英语四级考试成绩合格的概率为$\frac{4}{5}$，首次不合格第二次合格的概率为$\frac{9}{10}$，

所以两位同学都首次参加英语四级考试成绩合格的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$，即$\frac{16}{25}$，

两位同学其中一位首次合格，另一位同学首次不合格，第二次合格的概率为$2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}$，即$\frac{36}{125}$，

两位同学都首次不合格，第二次都合格的概率为$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}$，即$\frac{81}{2500}$，

所以至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率为$\frac{16}{25}+\frac{36}{125}+\frac{81}{2500}=\frac{2401}{2500}=0.9604$.

21. 已知抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为F，过点$P(0,2)$的动直线l与抛物线相交于A，B两点．当l经过点F时，点A恰好为线段PF中点．

（1）求p的值；

（2）是否存在定点T，使得$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为常数？若存在，求出点$T$的坐标及该常数；若不存在，说明理由．

【答案】（1）$\sqrt{2}$

（2）存在；$T\left(\sqrt{2},4\right)$，$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=18$

【解析】

【分析】（1）结合中点坐标公式表示出点A的坐标带入抛物线的方程即可求出结果；

（2）设出直线的方程与抛物线联立，进而结合根与系数的关系得到$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$的表达式，从而可得

$\begin{cases}4m+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}n=0\\4-2\sqrt{2}m=0\end{cases}$，因此解方程组即可求出结果.

【小问 1 详解】

因为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$P(0,2)$，且点$A$恰好为线段$PF$中点，所以$A\left(\frac{p}{4},1\right)$，又因为$A$在抛物线上，所以$1^2=2p\cdot\frac{p}{4}$，

即$p^2=2$，解得$P=\sqrt{2}$

【小问2详解】

设$T(m.n)$，可知直线l斜率存在；设l：$y=kx+2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立方程得：$\begin{cases}y^2=2\sqrt{2}x\\y=kx+2\end{cases}$，所以$k^2y^2-2\sqrt{2}y+4\sqrt{2}=0$，

所以$y_1+y_2=\frac{2\sqrt{2}}{k},y_1y_2=\frac{4\sqrt{2}}{k}$，

又：$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1-m)(x_2-m)+(y_1-n)(y_2-n)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}y_1^2-m\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}y_2^2-m\right)+(y_1-n)(y_2-n)$

$=\frac{1}{8}y_1^2y_2^2-\frac{\sqrt{2}}{4}m\left(y_1^2+y_2^2\right)+m^2-n\left(y_1+y_2\right)+n^2$

$=\frac{4}{k^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}m\left(\frac{8}{k^2}-\frac{8\sqrt{2}}{k}\right)+m^2+\frac{4\sqrt{2}}{k}-\frac{2\sqrt{2}n}{k}+n^2$

$=\frac{4-2\sqrt{2}m}{k^2}+\frac{4m+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}n}{k}+m^2+n^2$，

令$\begin{cases}4m+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}n=0\\4-2\sqrt{2}m=0\end{cases}$，解之得：$\begin{cases}m=\sqrt{2}\\n=4\end{cases}$，即$T\left(\sqrt{2},4\right)$，此时$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=m^2+n^2=18$

【点睛】(1)直线与抛物线的位置关系和直线与椭圆、双曲线的位置关系类似，一般要用到根与系数的关系；(2)有关直线与抛物线的弦长问题，要注意直线是否过抛物线的焦点，若过抛物线的焦点，可直接使用公式$|AB|=x_1+x_2+p$，若不过焦点，则必须用一般弦长公式.

22. 已知函数$f(x)=e^{ax}-x\,(a\in\mathbf{R})$

（1）若$a>0$，求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若任意$x\geq 0$，$f(x)\geq 1+\frac{1}{2}ax^2$，求$a$的取值范围.

【答案】（1）单调递减区间$\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$，单调递增区间$\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$

（2）$[1,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）由导数法判断单调性即可；

（2）令 $g(x)=f(x)-\left(1+\frac{1}{2}ax^2\right)=\mathrm{e}^{ax}-\left(\frac{1}{2}ax^2+x+1\right)$，则任意 $x\geq 0$，$f(x)\geq 1+\frac{1}{2}ax^2$ 等价为任意 $x\geq 0$，$g(x)\geq 0$，分别讨论 $a<0$、$a=0$、$0<a<1$、$a\geq 1$，通过导数法讨论即可

【小问 1 详解】

$f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{\ln a}{a}$，

当 $x<-\frac{\ln a}{a}$，$f'(x)<0$，$x>-\frac{\ln a}{a}$，$f'(x)>0$，所以单调递减区间为 $\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$，单调递增区间为 $\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$

【小问 2 详解】

令 $g(x)=f(x)-\left(1+\frac{1}{2}ax^2\right)=\mathrm{e}^{ax}-\left(\frac{1}{2}ax^2+x+1\right)$，则任意 $x\geq 0$，$f(x)\geq 1+\frac{1}{2}ax^2$ 等价为任意 $x\geq 0$，$g(x)\geq 0$，

$g'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-ax-1$，设 $u(x)=g'(x)$，$u'(x)=a^2\left(\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\right)$

当 $a=0$ 时，$g(x)=-x\leq 0$，不合题意；

当 $a<0$ 时，由指数函数及二次函数的单调性易得 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 单调递减，又 $g\left(-\frac{2}{a}\right)=\mathrm{e}^{-2}-1<0$，不合题意；

当 $a>0$ 时，则 $u'(x)$ 为增函数，令 $u'(x)=0$ 得 $x=-\frac{\ln a}{a}$

当 $0<a<1$ 时，$x\in\left(0,-\frac{\ln a}{a}\right)$，则 $u'(x)<0$，所以 $g'(x)$ 在 $\left(0,-\frac{\ln a}{a}\right)$ 上单调递减，

$g'(x)<g'(0)=a-1<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{\ln a}{a}\right)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，不合题意.

当 $a\geq 1$ 时，$x\in\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$ 时，$u'(x)>0$，又 $-\frac{\ln a}{a}\leq 0$，$x\geq 0$，$\therefore g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；所

以 $g'(x) \ge g'(0) = a-1 \ge 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；所以 $g(x) \ge g(0) = 0$，符合题意.

综上所述，$a \ge 1$.

【点睛】含参不等式恒成立问题，一般通过构造函数解决.

一般将参数分离出来，构造函数用导数法讨论不含参数部分的最值；或者包含参数一起构造函数，用导数法对参数分类讨论.

当参数不能分离出来时，也可尝试将不等式左右变形成一致形式，即可将该形式构造成函数，通过导数法分析单调性，将问题等价成对应自变量的不等式.

附表：

$P(K^2 \ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 已知抛物线 C：$y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 $P(0, 2)$ 的动直线 l 与抛物线相交于 A，B 两点．当 l 经过点 F 时，点 A 恰好为线段 PF 中点.

（1）求 p 的值；

（2）是否存在定点 T，使得 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$ 为常数？若存在，求出点 T 的坐标及该常数；若不存在，说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x(a \in \mathbf{R})$

（1）若 $a > 0$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若任意 $x \ge 0$，$f(x) \ge 1 + \frac{1}{2}ax^2$，求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。