

绝密★启用前

## 2020 年全国高三统一联合考试

## 文科数学

本试卷 4 页, 23 小题, 满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案用 0.5 mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{-3, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | (x+2)(x-1) < 0\}$ , 则  $A \cap B =$

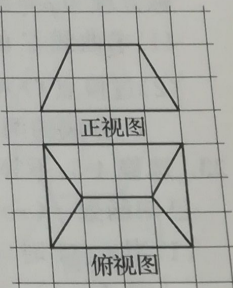
- A.  $\{x | -2 < x < 1\}$       B.  $\{-1, 0\}$       C.  $\{-1, 0, 1\}$       D.  $\{-3, -1, 0, 1\}$

2. 复数  $\frac{2i}{1-i}$  的虚部为

- A. 1      B. i      C. -1      D. -i

3. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有刍甍, 下广三丈, 袤四丈, 上袤二丈, 无广, 高二丈, 问: 积几何?” 其意思为: “今有底面为矩形的屋脊状的楔体, 下底面宽 3 丈、长 4 丈, 上棱长 2 丈, 高 2 丈, 问: 它的体积是多少?” 已知该楔体的正视图和俯视图如图中粗实线所示, 则该楔体的侧视图的周长为

- A. 3 丈      B. 6 丈  
C. 8 丈      D.  $(5 + \sqrt{13})$  丈



4. 已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 且  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ , 则  $\tan \alpha =$

- A. -2      B. 2      C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$

5. 某省在新的高考改革方案中规定: 每位考生的高考成绩是按照“语文、数学、英语”+“6 选 3”的模式设置的, 其中, “6 选 3”是指从物理、化学、生物、思想政治、历史、地理 6 科中任选 3 科. 某考生已经确定选一科物理, 现在他还要从剩余的 5 科中再选 2 科, 则在历史与地理两科中至少选一科的概率为

- A.  $\frac{3}{10}$       B.  $\frac{3}{5}$       C.  $\frac{7}{10}$       D.  $\frac{4}{5}$

6. 函数  $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})$  的最大值为

A. 1

B.  $\sqrt{3}$

C. 2

D.  $\sqrt{3} + 1$

7. 下列函数中, 其图像与函数  $y = \log_2 x$  的图像关于直线  $y = 1$  对称的是

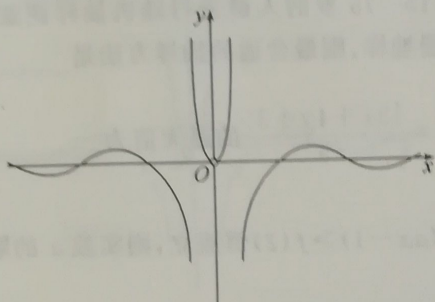
A.  $y = \log_2 \frac{2}{x}$

B.  $y = \log_2 \frac{4}{x}$

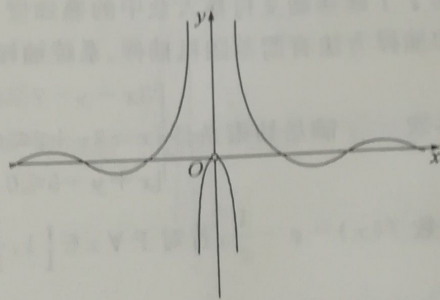
C.  $y = \log_2(2x)$

D.  $y = \log_2(4x)$

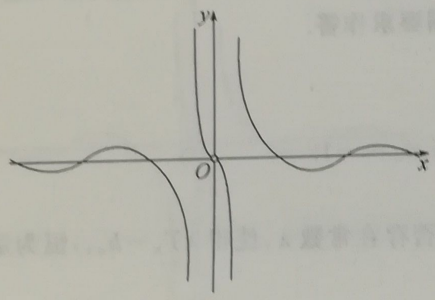
8. 函数  $y = \frac{\sin x}{\ln|x|}$  的图像大致为



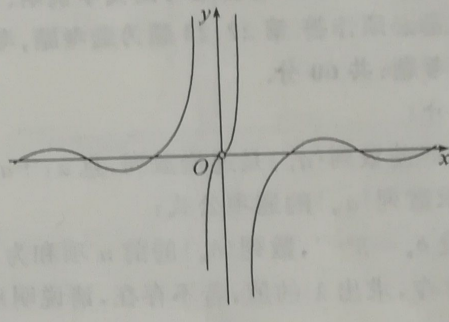
A



B



C



D

9. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 过焦点且倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线和  $C$  交于  $A, B$  两点, 则过  $A, B$  两点且与  $C$  的准线相切的圆的方程为

A.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

B.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

C.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$

D.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

10. 已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $a=1, a+b+c=3$ , 且  $c \sin A \cos B + a \sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为

A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  或  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

11. 阿波罗尼斯是亚历山大时期的著名数学家, “阿波罗尼斯圆”是他的主要研究成果之一: 若动点  $P$  与两定点  $M, N$  的距离之比为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ , 且  $\lambda \neq 1$ ), 则点  $P$  的轨迹就是圆. 事实上, 互换该定理中的部分题设和结论, 命题依然成立. 已知点  $M(2, 0)$ , 点  $P$  为圆  $O: x^2 + y^2 = 16$  上的点, 若存在  $x$  轴上的定点  $N(t, 0)$  ( $t > 4$ ) 和常数  $\lambda$ , 对满足已知条件的点  $P$  均有  $|PM| = \lambda |PN|$ , 则  $\lambda =$

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{1}{4}$



12. 已知长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  内接于半球  $O$ , 且底面  $ABCD$  落在半球的底面上, 底面  $A_1B_1C_1D_1$  的四个顶点落在半球的球面上. 若半球的半径为 3,  $AB=BC$ , 则该长方体体积的最大值为

- A.  $12\sqrt{3}$                       B.  $6\sqrt{6}$                       C. 48                      D. 72

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $a=(-2, 1)$ ,  $b=(3, 2)$ , 若  $a \perp (a+kb)$ , 则  $k=$  \_\_\_\_\_.

14. 近几年来移动支付越来越普遍, 不同年龄段的人对移动的熟知程度不同. 某学校兴趣小组为了了解移动支付在大众中的熟知度, 要对 15—75 岁的人群进行随机抽样调查, 可供选择的抽样方法有简单随机抽样、系统抽样和分层抽样, 则最合适的抽样方法是 \_\_\_\_\_.

15. 设实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 3x-y-2 \geq 0, \\ x-3y+2 \leq 0, \\ x+y-6 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = \frac{|3x+4y+3|}{5}$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

16. 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , 若对于  $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$ ,  $f(ax-1) > f(2)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  是递增数列, 且  $a_1+a_4=0$ ,  $a_2a_3=-1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = 3^{a_n+4}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $\lambda T_n - b_{n+1}$  恒为定值? 若存在, 求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分)

2014 年 1 月 25 日, 中共中央办公厅、国务院办公厅专门发布了《关于创新机制扎实推进农村扶贫开发工作的意见》, 对我国扶贫开发工作做出战略性创新部署, 提出建立精准扶贫工作机制. 某乡镇根据中央文件精神, 在 2014 年通过精准识别确定建档立卡的贫困户共有 473 户, 结合当地实际情况采取多项精准扶贫措施, 从 2015 年至 2018 年该乡镇每年脱贫户数见下表:

年份	2015	2016	2017	2018
年份代码 $x$	1	2	3	4
脱贫户数 $y$	55	69	71	85

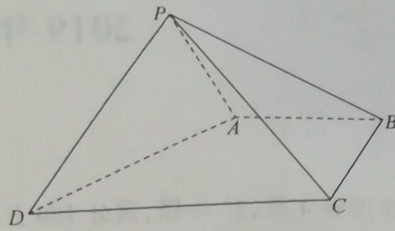
(1) 根据 2015—2018 年的数据, 求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(2) 利用(1)中求出的线性回归方程, 试估计到 2020 年底该乡镇的 473 户贫困户能否全部脱贫.

$$\text{附: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

19. (12分)

如图,四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为直角梯形,  $AB \parallel DC$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle PAB = 120^\circ$ ,  $DC = PC = 2$ ,  $PA = AB = BC = 1$ .



(1)证明:平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$ ;

(2)求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.

20. (12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $F_1, F_2$  分别为  $E$  的左、右焦点,过  $E$  的右焦点  $F_2$  作  $x$  轴的垂线交  $E$  于  $A, B$  两点,  $\triangle F_1AB$  的面积为  $\sqrt{2}$ .

(1)求椭圆  $E$  的方程;

(2)是否存在与  $x$  轴不垂直的直线  $l$  与  $E$  交于  $C, D$  两点,且弦  $CD$  的垂直平分线过  $E$  的右焦点  $F_2$ ? 若存在,求出直线  $l$  的方程;若不存在,请说明理由.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = x \ln x$ .

(1)求曲线  $y = f(x)$  在点  $P(1, f(1))$  处的切线方程;

(2)当  $a > 1$  时,求证:存在  $c \in (0, \frac{1}{a})$ ,使得对任意的  $x \in (c, 1)$ ,恒有  $f(x) > ax(x-1)$ .

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22, 23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分,作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号的方框涂黑.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程] (10分)

以原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系,点  $M$  的极坐标为  $(2, \beta)$ ,曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$ .

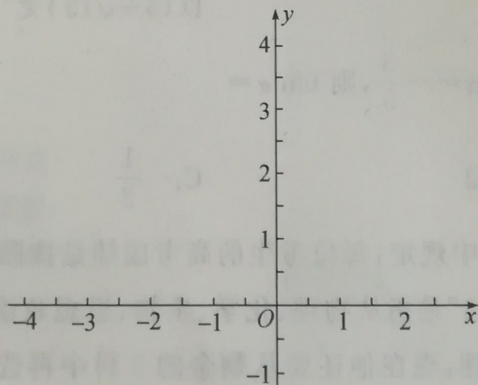
(1)求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2)过极点  $O$  和点  $M$  的直线与曲线  $C$  相交所得弦长为  $\sqrt{3}$ ,求  $\beta$  的值及此时直线  $OM$  将曲线  $C$  分成的两段弧长之比.

23. [选修 4-5:不等式选讲] (10分)

已知函数  $f(x) = |x+a| + |x-2a| (a \in \mathbf{R}), g(x) = |x| + 1$ .

(1)当  $a=1$  时,在下面的平面直角坐标系内作出函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图像,并由图写出不等式  $f(x) > g(x)$  的解集;



(2)若对任意的  $x_1 \in \mathbf{R}$  都有  $x_2 \in \mathbf{R}$ ,使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立,求实数  $a$  的取值范围.