高三年级学习质量评估考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	B	C	D	B	C	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	ACD	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\frac{1}{3}$；　14．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$；　15．2；　16．$2\sqrt{3}$，$\frac{9}{4}$（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）．

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．【解析】

（1）由等方差的定义可知

$\{c_n\}$，$\{d_n\}$为等方差数列；…………………………4 分

（2）因为数列$\{a_n\}$是首项为 1，公方差为 2 的等方差数列，

所以 $a_n^2=1+2(n-1)=2n-1$，…………………………7 分

所以 $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$．…………………………10 分

18．【解析】

（1）【方法一】

由题意可知，$\triangle BCD$的外接圆半径为$\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

由正弦定理 $\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=2R=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\times 2$， ………………………………………… 3 分

解得 $BD=5$； ………………………………………………………………………………… 5 分

【方法二】

由题意可知，$\triangle BCD$ 的外接圆半径为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

设该外接圆的圆心为 O，则 $\angle BOD=\dfrac{2\pi}{3}$，$OB=OD=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

所以 $BD^2=OB^2+OD^2-2OB\cdot OD\cdot\cos\angle BOD=25$， ………………………………… 3 分

解得 $BD=5$； ………………………………………………………………………………… 5 分

（2）【方法一】

在 $\triangle ABD$ 中，设 $\angle ABD=\alpha$，α 为锐角，则 $\angle ADB=2\alpha$，

因为 $\dfrac{AB}{\sin 2\alpha}=\dfrac{AD}{\sin\alpha}$，所以 $\dfrac{AB}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{3}{\sin\alpha}$， ……………………………… 7 分

所以 $AB=6\cos\alpha$，

因为 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\alpha$，

即 $9=36\cos^2\alpha+25-60\cos^2\alpha$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ………………………………… 9 分

则 $AB=6\cos\alpha=2\sqrt{6}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\alpha=5\sqrt{2}$． ……………………………………………… 12 分

【方法二】

在 $\triangle ABD$ 中，因为 $\angle ADB=2\angle ABD$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin 2\angle ABD=2\sin\angle ABD\cdot\cos\angle ABD$， ……………………………… 7 分

所以 $AB=2AD\cdot\cos\angle ABD=2AD\cdot\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}$，

因为 $BD=5$，$AD=3$，所以 $AB=2\sqrt{6}$， ……………………………………………………… 9 分

所以 $\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=5\sqrt{2}$． .... 12 分

【方法三】

在 $\triangle ABD$ 中，设 $\angle ABD=\alpha$， α 为锐角，则 $\angle ADB=2\alpha$， $\angle BAD=\pi-3\alpha$，

因为 $\frac{BD}{\sin 3\alpha}=\frac{AD}{\sin\alpha}$，即 $\frac{5}{\sin 3\alpha}=\frac{3}{\sin\alpha}$， .... 7 分

因为 $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，

所以 $\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 9 分

则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$， $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin 2\alpha=5\sqrt{2}$． .... 12 分

19.【解析】

（1）证明：在三棱锥 $D-ABC$ 中，

因为 $CD\perp BC, CD\perp AC$， $AC\cap BC=C$，

所以 $CD\perp$ 平面 ABC， .... 2 分

又 $AE\subset$ 平面 ABC，所以 $AE\perp CD$，

因为 $AB=AC$， E 为 BC 中点，

所以 $AE\perp BC$，又 $BC\cap CD=C$，

所以 $AE\perp$ 平面 BCD， .... 4 分

又 $AE\subset$ 平面 ADE，

所以 平面 $ADE\perp$ 平面 BCD． .... 5 分

（2）【方法一】

由（1）可知 $\angle DEC$ 即为直线 DE 与平面 ABC 所成的角，

所以 $\angle DEC=\frac{\pi}{4}$，故 $CD=CE=1$； .... 6 分

作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F，由（1）知 EA, EB, EF 两两垂直，

以 E 为原点，EA, EB, EF 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建系，……………… 7 分

则 $E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$D(0,-1,1)$，

易知 平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$，…………………………………………………… 8 分

又 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,-1,1)$，

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=-x-y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，

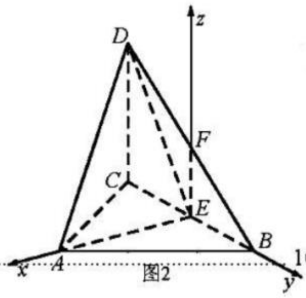

图2

解得 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$，…………………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，由图可知 该二面角为锐角，

所以 二面角 $A-DB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．……………………………………………… 12 分

【方法二】

由（1）可知 $\angle DEC$ 即为直线 DE 与平面 ABC 所成的角，

所以 $\angle DEC=\dfrac{\pi}{4}$，故 $CD=CE=1$；……………………………………………………… 6 分

由（1）知 $AE\perp$ 平面 BCD，过 E 作 $EH\perp BD$ 于 H，连接 AH，

由三垂线定理可知 $AH\perp BD$，

故 $\angle AHE$ 为二面角 $A-DB-C$ 的平面角. ……………………………………………… 8 分

由 $\triangle BHE\sim\triangle BCD$，得 $\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{EH}{CD}$，

即 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{EH}{1}$，

得 $EH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

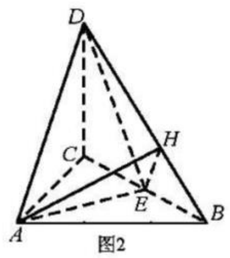

图2

所以 $AH=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$，…………………………………………………………………… 10 分

故 $\cos\angle AHE=\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

所以 二面角 $A-DB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. .... 12 分

20.【解析】

(1) 由题意可得

	好评	中评或差评	合计
物流迅速	50	5	55
物流迟缓	30	15	45
合计	80	20	100

.... 2 分

$K^2=\dfrac{(50\times15-30\times5)^2\times100}{80\times20\times55\times45}=\dfrac{100}{11}>6.635$, ... 3 分

所以 有99%的把握认为 “获得好评”与物流速度有关. .... 4 分

(2)(i) 由题意可知，X 的取值可能是$1,0,-1$，

每位买家给商家作出好评、中评、差评的概率分别为$0.8,0.1,0.1$，

所以 X 的分布列为

所以

X	1	0	-1
P	0.8	0.1	0.1

$EX=1\times0.8+0\times0.1+(-1)\times0.1=0.7$; .... 7 分

(ii)【方法一】

设商家每天的成交量为Y，则Y 的取值可能为$27,30,36$，

所以 Y 的分布列为

Y	27	30	36
P	0.4	0.4	0.2

所以 $EY=27\times0.4+30\times0.4+36\times0.2=30$， .... 10 分

所以 商家每天能获得的平均积分为$30\times0.7=21$，

5

商家一年能获得的积分：$21\times365=7665<10000$，……11 分

所以 该商家在 1 年内不能获得“诚信商家”称号．……12 分

【方法二】

商家每天的平均成交量为 $\dfrac{(36\times10+30\times20+27\times20)}{50}=30$，……10 分

所以 商家每天能获得的平均积分为 $30\times0.7=21$，

商家一年能获得的积分：$21\times365=7665<10000$，……11 分

所以 该商家在 1 年内不能获得“诚信商家”称号．……12 分

21．【解析】

（1）若选①，

设 $P(x,y)$，根据题意，$\dfrac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}{|x-\frac{4\sqrt{3}}{3}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，……3 分

整理得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以 所求的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……5 分

若选②，

设 $P(x,y)$，直线 l 与圆相切于点 H，

则 $|PA|+|PB|=d_1+d_2=2|OH|=4>2\sqrt{3}=|AB|$，……2 分

由椭圆定义知 点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆，……3 分

所以 $2a=4$，$2c=|AB|=2\sqrt{3}$，

故 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，$b=1$，

所以 所求的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……5 分

若选③，

设 $P(x,y)$，$S(x',0)$，$T(0,y')$，则 $\sqrt{(x')^2+(y')^2}=3$（*），

因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OT}$，所以 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}x',\\ y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

整理得 $\begin{cases}x'=\frac{3}{2}x,\\ y'=3y,\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

代入（*）得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以 所求的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ………………………………………… 5 分

(2)【方法一】

设 $Q(0,y_0)$，当 l' 斜率不存在时，$y_0=0$ ………………………………………… 6 分

当 l' 斜率存在时，设直线 l' 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-1)=0$．

$\Delta>0$ 恒成立，$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$， ………………………………………… 8 分

设线段 MN 的中点为 $G(x_3,y_3)$，则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，$y_3=k(x_3-1)=-\frac{k}{1+4k^2}$．

所以 线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y+\frac{k}{1+4k^2}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4k^2}{1+4k^2})$．

令 $x=0$，得 $y_0=\frac{3k}{1+4k^2}=\frac{3}{\frac{1}{k}+4k}$． ………………………………………… 10 分

当 $k<0$ 时，$\frac{1}{k}+4k\leqslant -4$，当且仅当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，取等号，所以 $-\frac{3}{4}\leqslant y_0<0$；

当 $k>0$ 时，$\frac{1}{k}+4k\geqslant 4$，当且仅当 $k=\frac{1}{2}$ 时，取等号，所以 $0<y_0\leqslant\frac{3}{4}$；

综上，点 Q 纵坐标的取值范围是 $[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$． ………………………………………… 12 分

7

【方法二】

设$Q(0,y_0)$，根据题意直线l'斜率不为0，设直线l'的方程为$x=my+1$.

若$m=0$，则 $y_0=0$ 6分

当$m\neq 0$时，设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去$x$并整理得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$.

$\Delta>0$恒成立，$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}$ 8分

设线段MN的中点为$G(x_3,y_3)$，则 $y_3=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{m}{m^2+4}$，$x_3=my_3+1=\dfrac{4}{m^2+4}$.

所以 线段MN的垂直平分线的方程为$y+\dfrac{m}{m^2+4}=-m(x-\dfrac{4}{m^2+4})$.

令$x=0$，得$y_0=\dfrac{3m}{m^2+4}=\dfrac{3}{m+\dfrac{4}{m}}$ 10分

当$m<0$时，$m+\dfrac{4}{m}\leqslant -4$，当且仅当$m=-2$时，取等号，所以 $-\dfrac{3}{4}\leqslant y_0<0$；

当$m>0$时，$m+\dfrac{4}{m}\geqslant 4$，当且仅当$m=2$时，取等号，所以 $0<y_0\leqslant\dfrac{3}{4}$；

综上，点Q纵坐标的取值范围是$[-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}]$. 12分

【方法三】

设$Q(0,y_0)$，当l'斜率不存在时，$y_0=0$ 6分

当l'斜率存在时，设l'斜率为k，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段MN的中点为$G(x_3,y_3)$，

由$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\dfrac{2x_3}{4\times 2y_3}=-\dfrac{x_3}{4y_3}$， 8分

8

线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-y_3=\frac{4y_3}{x_3}(x-x_3)$，

令 $x=0$，得 $y_0=-3y_3$.

由 $k=-\frac{x_3}{4y_3}=\frac{y_3}{x_3-1}$，得 $y_3^2=-\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{4}x_3=-\frac{1}{4}(x_3-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{16}$， .... 10 分

因为 $0<x_3<1$，所以 $0<y_3^2\leqslant\frac{1}{16}$，则 $-\frac{1}{4}\leqslant y_3<0$ 或 $0<y_3\leqslant\frac{1}{4}$，

所以 $-\frac{3}{4}\leqslant y_0<0$ 或 $0<y_0\leqslant\frac{3}{4}$.

综上，点 Q 纵坐标的取值范围是 $[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$. .... 12 分

22.【解析】

（1）$f'(x)=\frac{a[(x-2)e^x+x+2]}{x^3}$，

$f'(2)=\frac{a}{2}=1$， .... 1 分

所以 $a=2$； .... 2 分

（2）要证 $f(x)>1$，只需证 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$，

$h'(x)=e^x-x-1$，$h''(x)=e^x-1$，

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $h''(x)>0$，

所以 $h'(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h'(x)=e^x-x-1>h'(0)=0$ .... 5 分

所以 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>h(0)=0$ 成立，

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>1$ 成立. .... 6 分

(3)【方法一】

由(2)知当$x>0$时，$f(x)>1$，

因为 $e^{x_{n+1}}=f(x_n)$，所以 $x_{n+1}=\ln f(x_n)$，

设$g(x_n)=\ln f(x_n)$，则 $x_{n+1}=g(x_n)$，

所以 $x_n=g(x_{n-1})=g(g(x_{n-2}))=\cdots=g((\cdots g(x_1)))>0$；……8分

要证：$2^n\left|e^{x_n}-1\right|<1$，只需证：$|e^{x_n}-1|<(\frac{1}{2})^n$，

因为 $x_1=\frac{1}{3}$，所以 $|e^{x_1}-1|=e^{\frac{1}{3}}-1$，

因为 $e-(\frac{3}{2})^3=e-\frac{27}{8}<0$，所以 $e^{\frac{1}{3}}<\frac{3}{2}$，所以 $|e^{x_1}-1|=e^{\frac{1}{3}}-1<\frac{1}{2}$，

故 只需证：$|e^{x_{n+1}}-1|<\frac{1}{2}|e^{x_n}-1|$，

因为 $x_n\in(0,+\infty)$，故只需证：$e^{x_{n+1}}-1<\frac{1}{2}e^{x_n}-\frac{1}{2}$，

即证：$f(x_n)-1<\frac{1}{2}e^{x_n}-\frac{1}{2}$，

只需证：当$x\in(0,+\infty)$时，$\varphi(x)=(\frac{1}{2}x^2-2)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x+2>0$，……10分

$\varphi'(x)=(\frac{1}{2}x^2+x-2)e^x+x+2$，$\varphi''(x)=(\frac{1}{2}x^2+2x-1)e^x+1$，

$\varphi'''(x)=(\frac{1}{2}x^2+3x+1)e^x>0$，

所以 $\varphi''(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

故 $\varphi''(x)=(\frac{1}{2}x^2+2x-1)e^x+1>\varphi''(0)=0$，

所以 $\varphi'(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

故 $\varphi'(x)=(\frac{1}{2}x^2+x-2)e^x+x+2>\varphi'(0)=0$，

所以 $\varphi(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

所以 $\varphi(x)=(\frac{1}{2}x^2-2)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x+2>\varphi(0)=0$，

所以 原不等式成立……12分

(ii)【方法二】

由(2)知当$x>0$时，$f(x)>1$，

因为 $e^{x_{n+1}}=f(x_n)$，所以 $x_{n+1}=\ln f(x_n)$，

设$g(x_n)=\ln f(x_n)$，则 $x_{n+1}=g(x_n)$，

所以 $x_n=g(x_{n-1})=g(g(x_{n-1}))=\cdots=g((\cdots g(x_1)))>0$； ………………………… 8分

要证：$2^n\left|e^{x_n}-1\right|<1$，只需证：$|e^{x_n}-1|<(\frac{1}{2})^n$，

因为 $x_1=\frac{1}{3}$，所以 $|e^{x_1}-1|=e^{\frac{1}{3}}-1$，

因为 $e-(\frac{3}{2})^3=e-\frac{27}{8}<0$，所以 $e^{\frac{1}{3}}<\frac{3}{2}$，所以 $|e^{x_1}-1|=e^{\frac{1}{3}}-1<\frac{1}{2}$，

故 只需证：$|e^{x_{n+1}}-1|<\frac{1}{2}|e^{x_n}-1|$，

因为 $x_n\in(0,+\infty)$，故只需证：$e^{x_{n+1}}-1<\frac{1}{2}e^{x_n}-\frac{1}{2}$，

即证：$f(x_n)-1<\frac{1}{2}e^{x_n}-\frac{1}{2}$，

只需证：当$x\in(0,+\infty)$时，$\varphi(x)=(\frac{1}{2}x^2-2)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x+2>0$， ………………… 10分

因为 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x^2-4)e^x+\frac{1}{2}(x^2+4x+4)=\frac{1}{2}(x+2)[(x-2)e^x+(x+2)]$，

设 $u(x)=(x-2)e^x+(x+2)$，故只需证：$u(x)>0$，

$u'(x)=(x-1)e^x+1$，$u''(x)=xe^x>0$，

所以 $u'(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

故 $u'(x)=(x-1)e^x+1>u'(0)=0$，

所以 $u(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

故 $u(x)=(x-2)e^x+(x+2)>u(0)=0$，

所以 原不等式成立………………………………………………………………………………… 12分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html