衡中同卷 参考答案及解析

2022 届全国高三第一次学业质量联合检测 · 理科数学

一、选择题

1. D 【解析】$A=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<2\}=\{0,1\}$，$B=\{y\mid y=2^x,x\in A\}=\{1,2\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2\}$，所以 $A\cup B$ 的子集的个数是 $2^3=8$.

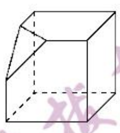
2. C 【解析】因为 $[100,110)$ 范围内的小长方形的面积最大，所以众数是 105.

3. A 【解析】设 $z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$，则 $z(2+3i)-\overline{z}=(a+bi)(2+3i)-(a-bi)=(a-3b)+3(a+b)i=-2+6i$，所以 $\begin{cases}a-3b=-2,\\3(a+b)=6,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=1$，所以 $z=1+i$.

4. C 【解析】设正方形的边长为 a，圆的半径为 r，则 $a=\sqrt{2}r$，易知白银比例为 $\sqrt{2}$. 因为 $46\times1.4=64.40$，$47\times1.5=70.50$，所以 $64.40<46.83\times\sqrt{2}<70.50$，故排除 A，B，D.

5. C 【解析】由题意知，$c=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$a=\sqrt{3}b$，所以直线 $ax-by=0$，即为 $y=\sqrt{3}x$. 将圆 M 的方程化为标准方程：$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2=\frac{m^2}{4}-1$. 由直线与圆相切可得 $d=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{m}{2}\right|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}-1}$，解得 $m=\pm4$.

6. D 【解析】由三视图还原几何体，如图，则该几何体是棱长为 2 的正方体切去一个底面边长为 $\sqrt{2}$，侧棱长为 1 的四面体后剩余的部分，所以体积 $V=2^3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{47}{6}$.



7. D 【解析】因为 $S_n=3n+1$，所以 $a_1=4$. 当 $n\geqslant2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n+1)-[3(n-1)+1]=3$，所以 $a_n=\begin{cases}4,n=1,\\3,n\geqslant2,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 不是常数列；反之，当 $a_n=1$ 时，$S_n=n$，显然不成立，所以“$S_n=3n+1$”是“数列 $\{a_n\}$ 是常数列”的既不充分也不必要条件.

8. B 【解析】在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2BD\cdot AB\cos B$，即 $12=4+BD^2-2BD\times2\times\frac{1}{2}$，解得 $BD=4$（负值舍去），所以 $BC=2BD=8$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=4+64-2\times2\times8\times\frac{1}{2}=52$，所以 $AC=2\sqrt{13}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{2\sqrt{13}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$，则 $R=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$，所以外接圆的面积为 $S=\frac{52\pi}{3}$.

9. D 【解析】$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}}{\frac{C_3^1}{C_6^1}}=\frac{3}{5}$.

10. B 【解析】由 $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}=\frac{2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}}=\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}$，得 $(2-\sin A)\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}-\cos A=0$. 因为 A 是锐角 $\triangle ABC$ 的一个内角，所以 $\cos A>0$，所以 $2\sin A(2-\sin A)-\cos^2A+\sin^2A=0$，化简得 $4\sin A=1$，所以 $\sin A=\frac{1}{4}$，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

11. B 【解析】根据题意设圆锥的底面半径为 r，则 $2\pi r=4\pi$，所以 $r=2$，所以圆锥的轴截面是边长为 4 的等边三角形，其内切圆半径为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，设正方体的棱长为 a，则 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\times2=\sqrt{3}a$，所以 $a=\frac{4}{3}$，正方体的体积为 $\frac{64}{27}$. 又因为圆锥的高为 $h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，则体积为 $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$，所以圆锥的体积与正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的体积的比值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$.

12. A 【解析】方程 $f(x)=bx-e^2$ 有两个不同的实数根，即为 $a^x-bx+e^2=0$ 有两个不同的实数根，即 $e^{x\ln a}-bx+e^2=0$ 有两个不同的实数根. 令 $t=x\ln a$，则 $e^t-\frac{bt}{\ln a}+e^2=0$，即 $\frac{b}{\ln a}=\frac{e^t+e^2}{t}$. 又因为 $b>2e^2$，$a>1$，所以 $t>0$. 记 $g(t)=\frac{e^t+e^2}{t}$，则 $g'(t)=$

$\frac{e^t\cdot t-(e^t+e^2)}{t^2}=\frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$.记 $h(t)=e^t(t-1)-e^2$,则 $h'(t)=e^t(t-1)+e^t=e^t\cdot t>0$.又 $h(2)=0$,所以当 $t\in(0,2)$ 时,$h(t)<0$,当 $t\in(2,+\infty)$ 时,$h(t)>0$,则 $g(t)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减,在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增,且当 t 趋近于 0 时,$g(t)$ 趋近于 $+\infty$,所以 $\frac{b}{\ln a}>g(2)=e^2$,所以 $\ln a<\frac{b}{e^2}$.因为 $b>2e^2$,所以 $\frac{b}{e^2}>2$,所以 $\ln a\leqslant 2$,即 $1<a\leqslant e^2$,即实数 a 的取值范围是 $(1,e^2]$.

二、填空题

13. -2 【解析】$y'=2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}$,则 $k=y'|_{x=1}=2$,所以直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$.令 $x=0$,得 $y=-2$,所以直线 l 在 y 轴上的截距为 -2.

14. 2 或 4 【解析】由题意得,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-e_1+(k-1)e_2$.若 $\angle AOB=90^\circ$,则由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,得 $6+k=0$,解得 $k=-6$(舍去);若 $\angle OAB=90^\circ$,则由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,得 $k-4=0$,解得 $k=4$;若 $\angle OBA=90^\circ$,则由 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,得 $k^2-k-2=0$,解得 $k=-1$(舍去)或 $k=2$.综上,k 的值为 2 或 4.

15. 8 【解析】由双曲线的对称性可知,四边形 MF_1NF_2 的对角线互相平分且相等,所以四边形 MF_1NF_2 是矩形.设 $|MF_1|=m$,$|MF_2|=n$,则 $|m-n|=8$.因为 $|F_1F_2|=4\sqrt{5}$,所以 $m^2+n^2=80$,化简得 $mn=8$,所以四边形 MF_1NF_2 的面积为 8.

16. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12}\right]$ 【解析】由题图可得 $A=2$,$\frac{3T}{4}=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$,所以 $T=\pi$,则 $\omega=2$.由 $f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2$,得 $2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.设 $g(x)=e^x-x$,$g'(x)=e^x-1$,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$,所以 $f(B)=2\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,所以 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$.由 $B\in(0,\pi)$,得 $2B+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$.结合正弦函数的图象可知,当 $2B+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$ 时,$\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$ 成立,所以 B 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12}\right]$.

三、解答题

17. 解:(1)自然授粉的花朵坐果数为 50,花朵总数为 1 050,则频率为 $\frac{50}{1\,050}=\frac{1}{21}$, (2分)

蜜蜂授粉的花朵坐果数为 80,花朵总数为 380,则频率为 $\frac{80}{380}=\frac{4}{19}$. (4分)

(2)列联表如下:

坐果	授粉方式		总计
	自然授粉	蜜蜂授粉	
花朵未坐果	1 000	300	1 300
花朵坐果	50	80	130
总计	1 050	380	1 430

(7分)

所以 $K^2=\frac{1\,430\times(1\,000\times80-300\times50)^2}{1\,050\times380\times1\,300\times130}\approx 89.599$. (10分)

因为 $89.599>10.828$, (11分)

所以有 99.9% 的把握认为自然授粉与蜜蜂授粉的花朵坐果率有差异. (12分)

18. 解:若选①②,

由条件 $S_n=n^2+n$ 可得,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$; (1分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$, (3分)

当 $n=1$ 时符合,所以 $a_n=2n$. (4分)

所以 $T_n=2\times3^1+4\times3^2+\cdots+2n\times3^n$,

$3T_n=2\times3^2+4\times3^3+\cdots+(2n-2)\times3^n+2n\times3^{n+1}$, (6分)

两式相减得 $-2T_n=2\times(3^1+3^2+\cdots+3^n)-2n\times3^{n+1}=$ (8分)

$2\times\frac{3(1-3^n)}{1-3}-2n\times3^{n+1}$, (10分)

所以 $T_n=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\times3^{n+1}$,③成立. (12分)

若选①③,

$T_n=a_1\times3+a_2\times3^2+\cdots+a_n\times3^n=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\times3^{n+1}$,

$T_{n-1}=a_1\times3+a_2\times3^2+\cdots+a_{n-1}\times3^{n-1}=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{3}{2}\right)\times3^n$, (2分)

两式相减得 $a_n\times3^n=2n\times3^n$, (4分)

所以 $a_n=2n(n\geqslant 2)$. (6分)

当 $n=1$ 时,$a_1\times3=\frac{3}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times3^2$, (8分)

解得 $a_1=2$,符合 $a_n=2n$, (9分)

所以 $a_n=2n$, (10分)

所以数列$\{a_n\}$是首项为2，公差为2的等差数列，　　（11分）

所以$S_n=2+4+6+\cdots+2n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$，②成立.　　（12分）

若选②③，

由条件$S_n=n^2+n$可得，

当$n=1$时，$a_1=S_1=2$；　　（1分）

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.　　（3分）

当$n=1$时符合，所以$a_n=2n$.　　（4分）

$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\dfrac{3}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\times 3^{n+1}$，

$T_{n-1}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=\dfrac{3}{2}+\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\times 3^n$，　　（6分）

两式相减得$a_nb_n=2n\times 3^n$，　　（8分）

解得$b_n=3^n(n\geqslant 2)$.　　（10分）

当$n=1$时，$2\times b_1=\dfrac{3}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times 3^2=6$，解得$b_1=3$，符合$b_n=3^n$，　　（11分）

所以$b_n=3^n$，①成立.　　（12分）

19.（1）**证明**：因为$BB_1\perp$平面ABC，所以$BB_1\perp AB$.

因为侧面AA_1B_1B为菱形，所以$AB\parallel A_1B_1$.

因为$A_1B_1\perp BC_1$，所以$AB\perp BC_1$.　　（1分）

因为$BB_1\cap BC_1=B$，所以$AB\perp$平面BB_1C_1C，所以$AB\perp BC$，则AB,BC,BB_1两两垂直.　　（2分）

以B为坐标原点，分别以BA,BC,BB_1所在直线为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系.

则$A(2,0,0)$，$B(0,0,0)$，$B_1(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$N(1,1,0)$，$C_1(0,2,1)$，

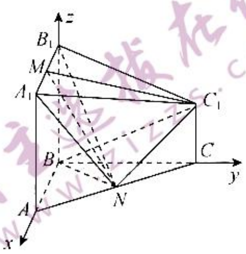
所以$\overrightarrow{BC_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{B_1N}=(1,1,-2)$，　　（3分）

所以$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{B_1N}=0+2-2=0$，

所以$BC_1\perp B_1N$.　　（4分）

又因为$BC_1\perp A_1B_1$，$A_1B_1\cap B_1N=B_1$，所以$BC_1\perp$平面A_1B_1N.

因为$BC_1\subset$平面BC_1N，所以平面$BC_1N\perp$平面A_1B_1N.　　（5分）



（2）**解**：设$B_1M=m(0\leqslant m\leqslant 2)$，则$M(m,0,2)$，

所以$\overrightarrow{MN}=(1-m,1,-2)$，$\overrightarrow{NC_1}=(-1,1,1)$，设平面$MNC_1$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NC_1}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}(1-m)x+y-2z=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$

令$x=3$，则$y=m+1$，$z=2-m$，

所以$\boldsymbol{m}=(3,m+1,2-m)$.　　（7分）

又因为$AB\perp$平面BB_1C_1C，

所以平面BB_1C_1C的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，　　（8分）

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{1\times\sqrt{9+(m+1)^2+(2-m)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2m^2-2m+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}}}$.　　（10分）

当$m=\dfrac{1}{2}$，即点M为棱A_1B_1靠近点B_1的四等分点时，面BB_1C_1C与面MNC_1所成的二面角余弦值的绝对值最大，此时正弦值最小.　　（12分）

20.（1）**解**：$f'(x)=\cos x-1+x$，　　（1分）

当$x\in(-\infty,0)$时，$\cos x-1+x<0$，所以$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；　　（2分）

当$x\in(0,+\infty)$时，$f''(x)=-\sin x+1\geqslant 0$，　　（3分）

所以$f'(x)=\cos x-1+x$单调递增，$f'(x)=\cos x-1+x>f'(0)=0$，

所以$f'(x)>0$，所以$f(x)$单调递增.　　（4分）

所以$f(x)_{\min}=f(0)=0$.　　（5分）

综上，函数$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty,0)$，函数$f(x)$的最小值是0，无最大值.　　（6分）

（2）**证明**：由第（1）问知，当$x>0$时，$\sin x>x-\dfrac{1}{2}x^2$，　　（7分）

取$x=\dfrac{1}{k^2}$，$k=1,2,3,\cdots,n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

有$\sin\dfrac{1}{k^2}>\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{2k^4}=\dfrac{2k^2-1}{2k^4}=\dfrac{k^2+k^2-1}{2k^4}\geqslant\dfrac{k^2}{2k^4}>\dfrac{1}{2k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$，　　（9分）

故$\sin\dfrac{1}{1^2}>\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$，

$\sin\dfrac{1}{2^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$，

$\sin\dfrac{1}{3^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$，

……

$\sin\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，　　（11分）

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{1}{k^2}=\sin\dfrac{1}{1^2}+\sin\dfrac{1}{2^2}+\sin\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{n^2}$

$>\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}$. (12分)

21. (1)**解**:如图,设 $A(x,y)$,因为圆 A 与直线 $y=-2$ 相切,所以圆 A 的半径为 $|y+2|$. (1分)

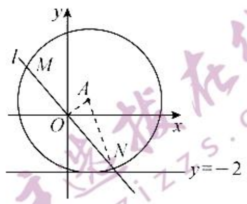
由圆的性质可得 $|OA|^2+|ON|^2=|AN|^2$, (2分)

即 $x^2+y^2+4=(y+2)^2$,

化简得 $x^2=4y$. (3分)

因为 O 与 A 不重合,所以 $y\neq 0$,

所以 C 的方程为 $x^2=4y(y\neq 0)$. (4分)



(2)**证明**:①由题意可知 Q_1,Q_2 与 O 不重合.

如图,设 $P(t,-1),Q_1(x_1,y_1)$,则 $x_1^2=4y_1$,

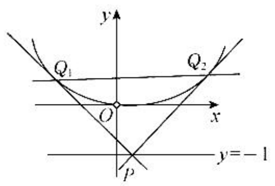
因为 $y'=\frac{x}{2}$,所以切线 PQ_1 的斜率为 $\frac{x_1}{2}$,故 $\frac{x_1}{2}=\frac{y_1+1}{x_1-t}$, (5分)

整理得 $tx_1-2y_1+2=0$. (6分)

设 $Q_2(x_2,y_2)$,同理可得 $tx_2-2y_2+2=0$.

所以直线 Q_1Q_2 的方程为 $tx-2y+2=0$, (7分)

所以直线 Q_1Q_2 过定点 $(0,1)$. (8分)



②因为直线 Q_1Q_2 的方程为 $tx-2y+2=0$,

由 $\begin{cases}tx-2y+2=0,\\ x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2tx-4=0$,

所以 $x_1+x_2=2t,x_1x_2=-4$. (9分)

又 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(x_1-t)(x_2-t)+(y_1+1)(y_2+1)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\left(\frac{tx_1+2}{2}+1\right)\left(\frac{tx_2+2}{2}+1\right)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\left(\frac{t}{2}x_1+2\right)\left(\frac{t}{2}x_2+2\right)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\frac{t^2}{4}x_1x_2+t(x_1+x_2)+4$

$=\left(1+\frac{t^2}{4}\right)x_1x_2+t^2+4$

$=0$, (11分)

所以 $PQ_1\perp PQ_2$. (12分)

22. **解**:(1) $\rho^2-2\rho\left(1+\sin\theta-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+1=0$,即 $\rho^2-2\rho(\cos\theta+\sin\theta)+1=0$. (2分)

因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$,即 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. (4分)

(2)设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{PM}=(-x,-1-\sqrt{2}-y),\overrightarrow{PN}=(-x,-1+\sqrt{2}-y)$,

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=x^2+(-1-\sqrt{2}-y)(-1+\sqrt{2}-y)=0$,化简得 $x^2+(y+1)^2=2$, (6分)

所以 C_2 的参数方程是 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数).

(8分)

因为 C_1 的圆心是 $(1,1)$,半径为 1,C_2 的圆心是 $(0,-1)$,半径为 $\sqrt{2}$,

所以圆心距 $d=\sqrt{(-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$,

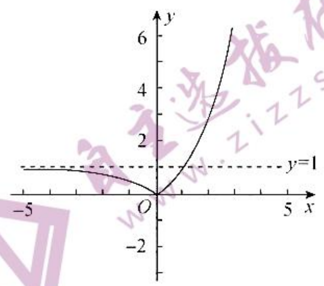
因为 $\sqrt{2}-1<\sqrt{5}<\sqrt{2}+1$,所以 C_1 与 C_2 相交. (10分)

23. **解**:(1) $|2x-1|+|2x+1|\geqslant|(2x-1)-(2x+1)|=2$,当且仅当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,等号成立, (2分)

所以 $|4a-2|<2$,即 $-2<4a-2<2$,解得 $0<a<1$.

(3分)

画出 $y=|2^x-1|$ 的图象如图,由图象可知 $0<b<1$.



(5分)

(2) $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}$

$=2-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)=2-\frac{3}{(a+1)(b+1)}$ (7分)

$\leqslant 2-\frac{3}{\left[\frac{(a+1)+(b+1)}{2}\right]^2}=\frac{2}{3}$,

当且仅当 $a+1=b+1$,即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,

(9分)

所以 $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$ 的最大值是 $\frac{2}{3}$. (10分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。