

## 2023年江西省高三教学质量监测卷

# 理科数学

说明:1.全卷满分150分,考试时间120分钟.

2.全卷分为试题卷和答题卡,答案要求写在答题卡上,不得在试卷上作答,否则不给分.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 < 4\}$ ,  $B = \{x | 3^x < 9\}$ , 则

A.  $A \cap B = B$

B.  $A \cup B = \{x | 0 < x < 2\}$

C.  $A \cap B = A$

D.  $A \cup B = \mathbf{R}$

2. 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = 2-i$  ( $i$  为虚数单位), 则复数  $z$  的模等于

A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. 若  $0 < \alpha < \pi$ , 则 " $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1$ " 是 " $\tan \alpha > 1$ " 的

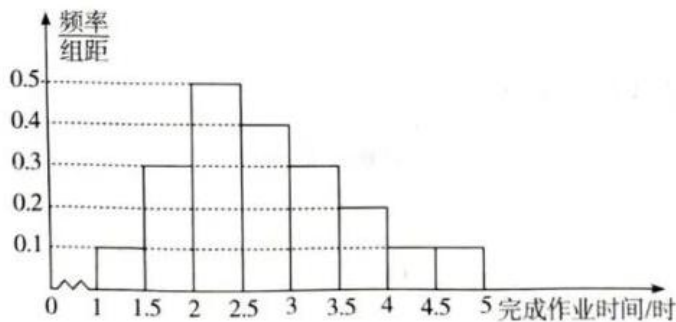
A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在某校随机抽取了100名学生,调查他们课后完成作业的时间,根据调查结果绘制如下频率分布直方图.根据此频率分布直方图,下列结论中正确的是



A. 估计该校有40%的学生在2小时内完成课后作业

B. 抽取的学生中有10人不能在4小时内完成课后作业

C. 抽取学生课后完成作业时间的100个数据的中位数在区间(2, 2.5)内

D. 抽取学生课后完成作业时间的100个数据的众数一定在区间(2, 2.5)内

5. 已知抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ , 点  $M$  在抛物线上, 且  $|MF| = 3$ , 则点  $M$  到  $y$  轴的距离为

A. 4

B.  $2\sqrt{3}$

C.  $2\sqrt{2}$

D. 3

6. 函数  $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + 1$  在区间  $[0, \pi]$  内的零点个数是

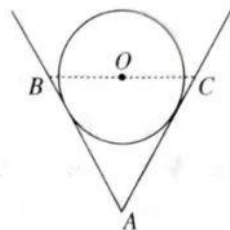
A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

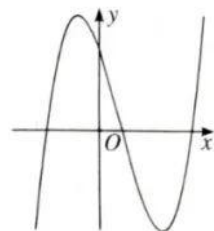
7. 在炎热的夏天里,人们都喜欢在饮品里放冰块.如图是一个高脚杯,它的轴截面是正三角形,容器内有一定量的水.若在高脚杯内放入一个球形冰块后,冰块没有开始融化前水面所在的平面恰好经过冰块的球心  $O$  (水没有溢出),则原来高脚杯内水的体积与球的体积之比是



- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{6}$

8. 已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的大致图象如图所示,则

- A.  $a > 0, b > 0, c < 0$                       B.  $a > 0, b < 0, c < 0$   
C.  $a > 0, b < 0, c > 0$                       D.  $a < 0, b > 0, c > 0$



9. 已知函数  $f(x) = \log_3(3-x) - \log_3(1+x) - x + 3$ , 则函数  $f(x)$  的图象与两坐标轴围成图形的面积是

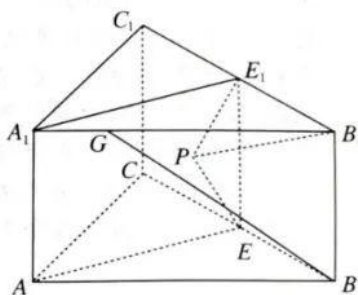
- A. 4                      B.  $4 \ln 3$   
C. 6                      D.  $6 \ln 3$

10. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ ,  $P$  是双曲线右支上一点,且  $PF_2 \perp F_1F_2$ ,  $I$  和  $G$  分别是  $\triangle PF_1F_2$  的内心和重心,若直线  $IG$  与  $x$  轴平行,则双曲线的离心率为

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C. 3                      D. 4

11. 如图,直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = AC = 2, AA_1 = 1, AB \perp AC$ , 点  $E, E_1$  分别是棱  $BC, B_1C_1$  的中点,点  $G$  在棱  $A_1B_1$  上,且  $GB_1 = \sqrt{2}$ , 截面  $AA_1E_1E$  内的动点  $P$  满足  $GB \perp PE_1$ , 则  $PE + PB_1$  的最小值是

- A.  $2 + \sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{6}$   
C.  $\sqrt{5}$                       D. 2



12. 若函数  $f(x) = e^{ax+1} - x(\ln x - 2) (a > 0)$  存在单调递减区间,则正数  $a$  的取值范围是

- A.  $(0, e^{-e})$                       B.  $(0, e^{-2})$                       C.  $(e^2, +\infty)$                       D.  $(e^e, +\infty)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量  $a, b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ ,  $|a| = 3, |b| = 2$ , 则  $(a+b)^2$  等于\_\_\_\_\_.

14. 已知圆  $C$  的方程为  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ , 若直线  $l: 3x + 4y - 5 = 0$  与圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $(x^2 + 2x + 3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ , 则  $a_1$  等于\_\_\_\_\_.

16. 毕达哥拉斯树,也叫“勾股树”,是由毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的树形图形(如图 1).

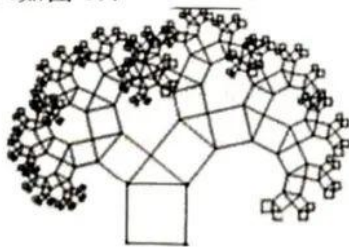


图 1

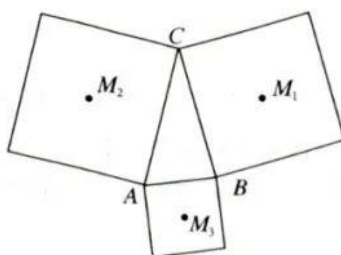


图 2

现由毕达哥拉斯树部分图形作出图 2,  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 面积为 1,  $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$ , 以  $\triangle ABC$  的三边为边长的正方形中心分别为  $M_1, M_2, M_3$ , 则  $|M_1M_2|^2 + |M_2M_3|^2 + |M_3M_1|^2$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

如图数表, 在第  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) 行中, 共有  $2^{i-1}$  个数, 第  $k$  个数为  $\frac{k}{2^{i-1}}$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$ ).

(1) 求第  $n$  行所有数的和;

第 1 行 1

(2) 求前 10 行所有数的和.

第 2 行  $\frac{1}{2}, 1$

第 3 行  $\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2}, 1$

...

第  $n$  行  $\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \frac{3}{2^{n-1}}, \dots, 1$

18. (12 分)

某集市上有摸彩蛋的游戏, 在不透明的盒中装有 9 个大小、形状相同的彩蛋, 其中黄色、红色、蓝色各 3 个. 游戏规则如下: 玩游戏者先交 10 元游戏费, 然后随机依次不放回地摸 3 个彩蛋, 根据彩蛋的颜色决定是否得到奖励, 若摸到的 3 个彩蛋颜色都相同, 获得奖金 100 元, 若摸到 3 个彩蛋颜色各不相同, 获得奖金 10 元, 其他情况没有奖励.

(1) 记某游戏者第一次摸到黄色彩蛋为事件  $A$ , 该游戏者这次游戏获奖 100 元为事件  $B$ , 求  $P(A), P(B)$ , 并判断事件  $A, B$  是否相互独立;

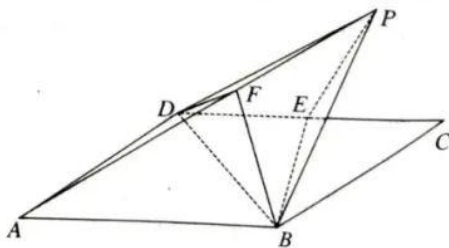
(2) 判断是否应该玩这个游戏, 并说明理由.

19. (12 分)

如图, 已知菱形  $ABCD$  中,  $AB=4, \angle BAD=60^\circ$ , 点  $E$  为边  $CD$  的中点, 沿  $BE$  将  $\triangle CBE$  折起, 得到  $\triangle PBE$  且二面角  $P-BE-A$  的大小为  $120^\circ$ , 点  $F$  在棱  $PA$  上,  $PE \parallel$  平面  $BDF$ .

(1) 求  $\frac{AF}{FP}$  的值;

(2) 求二面角  $A-FD-B$  的余弦值.



20. (12 分)

已知函数  $f(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{3}ax^3$  ( $a > e, e$  是自然对数的底数).

(1) 讨论函数  $f(x)$  的极值点的个数;

(2) 证明: 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内有且只有一个零点.

21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点  $A(-2, 0)$ , 点  $P, Q$  是椭圆  $C$  上关于原点对称的两个动点(点  $P, Q$  不与点  $A$  重合),  $\triangle APQ$  面积的最大值是 2.

(1) 求椭圆  $C$  的方程.

(2) 若直线  $AP, AQ$  与  $y$  轴分别相交于点  $D, E$ , 是否存在定点  $R$ , 总有  $\overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{ER} = 0$ ? 若存在, 求出定点  $R$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分, 不涂、多涂均按所答第一题评分; 多答按所答第一题评分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=6+t, \\ y=-t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{3}{1+2\sin^2\theta}$ .

(1) 求直线  $l$  和曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 点  $P, Q$  分别是直线  $l$ 、曲线  $C$  上的动点, 求  $|PQ|$  的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数  $f(x) = \left| \frac{1+2x}{x} \right| + \left| \frac{1-2x}{x} \right|$  的最小值为  $m$ .

(1) 求  $m$  的值;

(2) 若  $a > 0, b > 0, a + b = m$ , 求  $\frac{ab}{a+4b}$  的最大值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

