2022～2023 学年高三押题信息卷

理科数学(一)参考答案

1. A　由题得 $A=(1,4]$，$B=\{y|y=\log_4 x,1<x\leqslant 4\}=(0,1]$，所以 $A\cup B=(0,4]$. 故选 A.

2. D　设 $z_1=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$，$|z_1|=1$，故 $a^2+b^2=1$，$z_1+z_2=i$，则 $z_2=-a+(1-b)i$，$|z_2|=|-a+(1-b)i|=\sqrt{(-a)^2+(1-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2b+1}=\sqrt{2-2b}$，$b\in[-1,1]$，当 $b=-1$ 时，$|z_2|$ 有最大值为 2. 故选 D.

3. C　基本事件共有 36 个，而满足点 (x,y) 到原点 O 的距离不大于 4 的基本事件有 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,1)$，$(3,2)$ 共 8 个，所求概率为 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$. 故选 C.

4. A　由于 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 是方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，所以 $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=-5$，$\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=6$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\frac{-5}{1-6}=1$. 故选 A.

5. B　执行第一次循环，$b=1+2=3$，$a=3-1=2$，$n=2$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=3+4=7$，$a=7-2=5$，$n=3$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

执行第三次循环，$b=7+10=17$，$a=17-5=12$，$n=4$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$. 故选 B.

6. C　设 $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{MN}$，显然 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$，得 $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}$，显然 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以有 $\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$，即 $\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，可知 $\begin{cases}\frac{2k}{3}=\lambda,\\ \frac{4}{5}(1-k)=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{6}{11},\\ \lambda=\frac{4}{11}.\end{cases}$ 故选 C.

7. A　当 $N=2$，$\sigma=2\ 000$ 时，$x=R=\frac{\sigma}{N}=\frac{2\ 000}{2}=1\ 000$，因为 $8.6^{-5.75}\approx 4.23\times 10^{-6}$，且 $8.6^{-5.75x}=8.6^{-5.75\times 1\ 000}=(8.6^{-5.75})^{1\ 000}\approx(4.23\times 10^{-6})^{1\ 000}$ 近似于 0，所以当 $x=1\ 000$ 时，y 近似于 $\frac{470}{1+0}=470$. 故选 A.

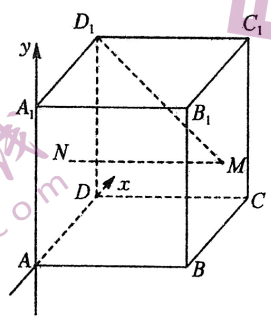
8. B　在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 DD_1C_1C 是平行四边形，又 P 是 C_1D，CD_1 的交点，所以 P 是 C_1D 的中点，所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-2$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，所以 $\overrightarrow{AP}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=5$，即 $AP=\sqrt{5}$. 故选 B.

9. A　n 为偶数时，$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_n=1+5+\cdots+2n-3=\frac{\frac{n}{2}(1+2n-3)}{2}=\frac{n}{4}(2n-2)=\frac{n(n-1)}{2}=190$，解得 $n=20$，$\because S_k=S_{k+1}=190$，$\therefore k=20$ 或 19. 当 $k=19$ 时，$S_{19}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+a_{19}=a_1+3+7+\cdots+35=a_1+\frac{9(3+35)}{2}=a_1+171=190$，$\therefore a_1=19$；当 $k=20$ 时，$S_{21}=a_1+3+7+\cdots+39=a_1+\frac{10(3+39)}{2}=a_1+210=190$，$\therefore a_1=-20$，$a_1$ 的取值集合为 $\{-20,19\}$. 故选 A.

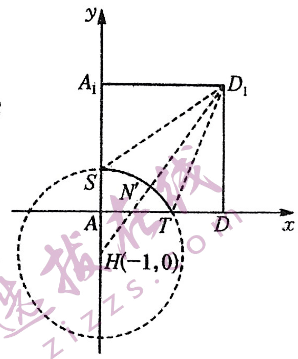
10. D　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 5 的奇函数，所以 $f(0)=f(5)=f(10)=0$，又 $f(3)=0$，所以 $f(3)=f(8)$，$f(-3)=f(2)=f(7)=0$，$f\left(-\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}+5\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$. 所以 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，$f\left(\frac{15}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}+5\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 内的零点个数最少是 9. 故选 D.

11. D　关于 x 的方程 $\sin 2x+2\cos 2x=-2$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β. 即 $\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\theta)=-1\left(\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β，即方程 $\sin(2x+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β. 不妨令 $\alpha<\beta$，由 $x\in[0,\pi)$，则 $2x+\theta\in[\theta,2\pi+\theta)$，所以 $\sin(2\alpha+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(2\beta+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\sin\theta=-\sin(2\alpha+\theta)=-\sin(2\beta+\theta)$，则 $2\alpha+\theta=\pi+\theta$，$2\beta+\theta=2\pi-\theta$，即 $2\alpha-2\beta=-\pi+2\theta$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}+\theta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

12. B　设点 M 在平面 ADD_1A_1 的投影为点 N，则 $|MN|=3$，所求线面角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{|MN|}{|D_1N|}=\frac{3}{|D_1N|}$，因为 $MB_1=2MB$，所以 $NA_1=2NA$，在平面 ADD_1A_1 上，以 A 为坐标原点，AD 为 x 轴，AA_1 为 y 轴建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$，$A_1(0,3)$，设 $N(x,y)$，$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，化简得 $x^2+(y+1)^2=4$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，故点 N 的轨迹为以 $H(0,-1)$ 为圆心，半径为 2 的且位于第一象限的圆弧 ST，如图所示. 连接 HD_1，与圆弧 ST 相交于点 N'，此时 $D_1N=D_1N'$ 取得最小值，由勾股定理得 $HD_1=\sqrt{9+16}=5$，所以 $D_1N'=5-2=3$，当点 N 与 S 重合时，$D_1N=D_1S$ 取得最大值，由勾股定理得 $D_1S=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$，则 $D_1N\in[3,\sqrt{13}]$，$\tan\theta=\frac{|MN|}{|D_1N|}\in\left[\frac{3\sqrt{13}}{13},1\right]$. 故选 B.



13. 24　由已知得椭圆与双曲线具有共同的焦点 $F_1(0,5)$，$F_2(0,-5)$，由椭圆定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=14$，故 P 与双曲线两焦点的距离之和为 14，又 $|F_1F_2|=10$，因此 P 与双曲线两焦点连线构成三角形的周长为 $14+10=24$.

14. -336　由题意得 $(x-1)^8=[-2+(x+1)]^8$.

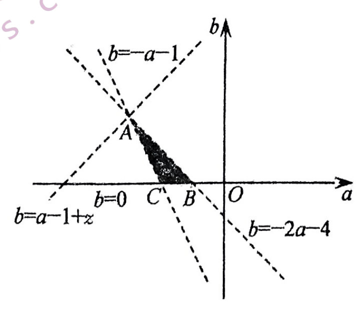
$(x-1)^8=[-2+(x+1)]^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r(-2)^{8-r}(x+1)^r$，$r=0,1,2,\cdots,8$.

当 $r=5$ 时，$T_6=C_8^5(-2)^3(x+1)^5=-448(x+1)^5$，所以 $a_5=-448$；

当 $r=6$ 时，$T_7=C_8^6(-2)^2(x+1)^6=112(x+1)^6$，所以 $a_6=112$.

所以 $a_5+a_6=-448+112=-336$.

15. $(2,6)$　$\because f(x)=x^2+ax+b$ 在 $(0,1)$ 和在 $(1,2)$ 上各有 1 个零点，$\therefore\begin{cases}f(0)=b>0,\\f(1)=1+a+b<0,\\f(2)=4+2a+b>0,\end{cases}$ 画出它的可行域，如图所示：$\triangle ABC$ 的内部.



令 $z=f(-1)=1-a+b$,则 $b=a-1+z$,如图,当 $b=a-1+z$ 过 $B(-1,0)$ 时,$z=2$;当 $b=a-1+z$ 过 $A(-3,2)$ 时,$z=6$,故 $f(-1)$ 的取值范围是 $(2,6)$.

16. $[-4,+\infty)$　因为 $Q(-2,1)$ 在抛物线 C 上,所以 $(-2)^2=2p\cdot 1$,解得 $p=2$,所以 $C:x^2=4y$.

设 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$. 由 $y=\frac{x^2}{4}$,求导得 $y'=\frac{x}{2}$,

则直线 $PM:y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$,直线 $PN:y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4},\\ y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{x_1x_2}{4},\end{cases}$ 所以 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$,又 P 在直线 $x=2$ 上,得 $x_1+x_2=4$. 所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=$

$\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_1^2-x_1x_2}{4}\right)\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{x_2^2-x_1x_2}{4}\right)=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}-\frac{x_1x_2(x_1-x_2)^2}{16}=-\frac{(x_1-x_2)^2(4+x_1x_2)}{16}=$

$-\frac{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](4+x_1x_2)}{16}=-\frac{(16-4x_1x_2)(x_1x_2+4)}{16}=\frac{(x_1x_2)^2-16}{4}\geqslant -4.$

17. 解:(1)由题知男性顾客共有 $350\times\frac{3}{5}=210$ 人,女性顾客共有 $350\times\frac{2}{5}=140$ 人, ………………………… 1分

按分层抽样抽取 105 人,则应该抽取男性顾客 $105\times\frac{210}{350}=63$ 人,女性顾客 $105\times\frac{140}{350}=42$ 人; ……………… 2分

所以 $x=63-(8+9+19+12+8+4)=3$,$y=42-(2+5+12+11+7+2)=3$. ………………………… 4分

(2)由频率分布表可知,在抽取的 105 人中,男性顾客中频繁更换手机的有 20 人,女性顾客中频繁更换手机的有 10 人,据此可得 2×2 列联表:

	频繁更换手机	未频繁更换手机	合计
男性顾客	20	43	63
女性顾客	10	32	42
合计	30	75	105

………………………… 8分

所以 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\approx 0.778$.

因为 $0.778<6.635$,所以没有 99%以上的把握认为“频繁更换手机与性别有关”. ………………………… 12分

18. (1)解:设椭圆 C 的半焦距为 c. 当圆 $x^2+y^2=4$ 在椭圆 C 的内部时,$b=2,c=1,a^2=b^2+c^2=5$,

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………… 2分

当圆 $x^2+y^2=4$ 在椭圆 C 的外部时,$a=2,c=1,b^2=a^2-c^2=3$,

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)证明:设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

因为椭圆 C 的矩轴长小于 4,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 5分

则由已知可得,切线 AT 的方程为 $\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$,$BT$ 的方程为 $\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$, ………………………… 7分

将 $T(8,t)$ 代入 AT,BT 的方程整理可得,

$6x_1+ty_1-3=0$,$6x_2+ty_2-3=0$.

显然 A,B 的坐标都满足方程 $6x+ty-3=0$, ………………………… 10分

故直线 AB 的方程为 $6x+ty-3=0$,

令 $y=0$,可得 $x=\frac{1}{2}$,即直线 AB 过定点$\left(\frac{1}{2},0\right)$. …………………………………………………………………… 12 分

19.(1)解:由正弦定理,得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2OA$,

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{2OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\angle BAC\in(0,\pi)$,所以$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 2 分

当$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$时,由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\angle BAC=AB^2+AC^2-AB\times AC\geqslant 2AB\times AC-AB\times AC=AB\times AC$,

所以 $AB\times AC\leqslant 3$,$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

当且仅当 $AB=AC=\sqrt{3}$时,取等号;…………………………………………………………………… 4 分

当$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$时,同理可得 $AB\times AC\leqslant 1$,$\triangle ABC$ 的面积 $S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$,

当且仅当 $AB=AC=1$ 时,取等号. …………………………………………………………………… 5 分

综上,$\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)证明:设 $AM=x_1$,$BM=y_1$,$AN=x_2$,$CN=y_2$,

由余弦定理知 $\cos\angle AMO=\frac{x_1^2+OM^2-AO^2}{2x_1\cdot OM}$,$\cos\angle BMO=\frac{y_1^2+OM^2-BO^2}{2y_1\cdot OM}$. ………………………… 7 分

由 O 是$\triangle ABC$ 外心知 $AO=BO=CO$,

而 $\cos\angle AMO+\cos\angle BMO=0$,

所以$\frac{x_1^2+OM^2-AO^2}{2x_1\cdot OM}+\frac{y_1^2+OM^2-BO^2}{2y_1\cdot OM}=0$,

即$(x_1y_1+OM^2-AO^2)(x_1+y_1)=0$, …………………………………………………………………… 9 分

而 $x_1+y_1\neq 0$,因此 $x_1y_1=AO^2-OM^2$. …………………………………………………………………… 10 分

同理可知 $x_2y_2=AO^2-ON^2$,

因此 $x_1y_1=x_2y_2$,

所以 $AM\cdot MB=AN\cdot NC$. …………………………………………………………………… 12 分

20.解:(1)过 P 作直线 l 与 BC 平行,延长 DE 与 l 交于点 G,连接 OG,OG 与 PB 的交点即为点 F. ………………… 2 分

因为底面 $ABCD$ 是矩形,O 是 BC 的中点,所以 $AD/\!/BC$,且 $AD=2OB$.

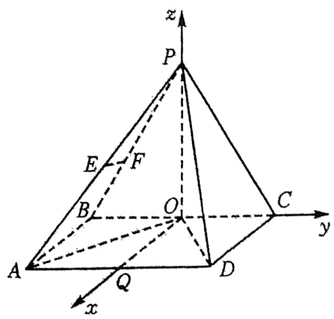
又 $l/\!/BC$,所以 $l/\!/AD$,因为 E 是 PA 的中点,可得 $PG=AD$,则 $PG=2OB$,所以 $PF=2BF$.

故 F 在棱 PB 的靠近 B 的三等分点处. …………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $PB=PC$,O 是 BC 的中点,所以 $PO\perp BC$,

又平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$,

$PO\subset$平面 PBC,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………… 6 分



取 AD 中点 Q,连接 OQ,易知 OQ,OC,OP 两两相互垂直,

如图,分别以 OQ,OC,OP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(1,-1,0)$,$B(0,-1,0)$,$C(0,1,0)$,$D(1,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{CP}=(0,-1,\sqrt{2})$. ………………………………………… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=0,\\ -y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$令$z=1$,则$y=\sqrt{2}$,所以$\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2},1)$. ………………………………………… 10分

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}=\frac{2}{3}(0,-1,-\sqrt{2})-\frac{1}{2}(1,-1,-\sqrt{2})=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. ………… 11分

设EF与平面PCD所成角为θ,

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

所以EF与平面PCD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………… 12分

21.(1)解:$f'(x)=ax+1-1-\ln x=ax-\ln x$,

因为$f(x)$无极值,所以方程$f'(x)=0$无变号零点,即方程$a=\frac{\ln x}{x}$无变号零点.

令$g(x)=\frac{\ln x}{x}$,$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当$x\in(0,e)$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x\in(e,+\infty)$,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

$g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$,结合$g(x)$的图象可知,$a\geq\frac{1}{e}$时,方程$f'(x)=0$无变号零点,

即a的取值范围为$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. ………………………………………………………………… 3分

(2)证明:方程$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+a$有2个不同零点,即方程$a=x-x\ln x$有2个不同零点.

令$h(x)=x-x\ln x$,$h'(x)=1-1-\ln x=-\ln x$,

当$x\in(0,1)$,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.

所以$h(x)_{\max}=1$,结合$h(x)$图象可知,$a\in(0,1)$,且$0<x_1<1<x_2<e$,

$\begin{cases}x_1-x_1\ln x_1=a,\\ x_2-x_2\ln x_2=a,\end{cases}$ ………………………………………………………………… 4分

$x_1-a=x_1-(x_1-x_1\ln x_1)=x_1\ln x_1<0$,所以$0<x_1<a<1$. ………………………………… 5分

令$y=-\frac{1}{e-1}(x-e)=a$,解得$x=e-ea+a$,

则$x_2-(e-ea+a)=x_2-[e-e(x_2-x_2\ln x_2)+x_2-x_2\ln x_2]=x_2\ln x_2+e(x_2-x_2\ln x_2)-e$.

令$\varphi(x)=x\ln x+e(x-x\ln x)-e$,

则$\varphi'(x)=\ln x+1-e\ln x=(1-e)\ln x+1$,易知$\varphi'(x)$单调递减.

令$\varphi'(x)=0$,解得$x=e^{\frac{1}{e-1}}$.

当$x\in(1,e^{\frac{1}{e-1}})$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$单调递增;当$x\in(e^{\frac{1}{e-1}},e)$,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$单调递减.

所以$\varphi(x)_{\min}=\min\{\varphi(0),\varphi(e)\}=\{0,0\}=0$.

当$x\in(1,e)$时,$\varphi(x)>0$,即$e-ae+a<x_2<e$. ……………………………………………… 6分

综上,$\begin{cases}-a<-x_1<0,\\ e-ae+a<x_2<e,\end{cases}$所以$x_2-x_1>-ae+e$. ………………………………… 7分

$h(x)$的图象在$(e,f(e))$的切线方程为$y=-x+e$,令$-x+e=a\Rightarrow x=-a+e$,

$-a+e-x_2=-(x_2-x_2\ln x_2)+e-x_2=x_2\ln x_2-2x_2+e$.

令$m(x)=x\ln x-2x+e$,$m'(x)=\ln x-1$,当$x\in(1,e)$,$m'(x)<0$,$m(x)$单调递减,

所以$m(x)>m(e)=0$,即$-a+e-x_2>0$,所以$1<x_2<-a+e$. ……………………………… 9分

$h(x)$的图象在$\left(\frac{1}{e},f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$的切线方程为$y=x+\frac{1}{e}$，令$x+\frac{1}{e}=a\Rightarrow x=a-\frac{1}{e}$.

$x_1-\left(a-\frac{1}{e}\right)=x_1-a+\frac{1}{e}=x_1-(x_1-x_1\ln x_1)+\frac{1}{e}=x\ln x+\frac{1}{e}$.

令$n(x)=x\ln x+\frac{1}{e}$，$n'(x)=1+\ln x$，

当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$n'(x)<0$，$n(x)$单调递减，当$x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$时，$n'(x)>0$，$n(x)$单调递增.

$n(x)\geqslant n\left(\frac{1}{e}\right)=0$，$x_1\geqslant a-\frac{1}{e}$，所以$a-\frac{1}{e}\leqslant x_1<1$. ……………………………… 11分

$\begin{cases}1<x_2<-a+e,\\-1<-x_1\leqslant -a+\frac{1}{e},\end{cases}$ 所以$0<x_2-x_1<-2a+e+\frac{1}{e}$.

综上，$-ae+e<x_2-x_1<-2a+e+\frac{1}{e}$. ……………………………… 12分

22. 解：(1)由已知$\begin{cases}x=2+t,\\y=2\sqrt{3}+\sqrt{3}t\end{cases}$消去参数$t$得$y=\sqrt{3}x$，

将$y=\rho\sin\theta$，$x=\rho\cos\theta$代入上式化简整理得$\theta=\frac{\pi}{3}$，

故直线l的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………… 2分

由$\rho=\frac{1}{\rho}+2\sqrt{3}\cos\theta$，得$\rho^2=1+2\sqrt{3}\rho\cos\theta$，

$x^2-2\sqrt{3}x+y^2=1$，$(x-\sqrt{3})^2+y^2=4$，

所以曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）. ……………………………… 5分

(2)将直线l的极坐标方程代入曲线C的极坐标方程得$\rho^2-\sqrt{3}\rho-1=0$，

解得$\rho=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$，不妨设$|OM|=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$，$|ON|=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$，

所以$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{4}{10+2\sqrt{21}}+\frac{4}{10-2\sqrt{21}}=5$. ……………………………… 10分

23. 解：(1)由题意$\because 4a+b=ab$，$\therefore \frac{4}{b}+\frac{1}{a}=1$， ……………………………… 1分

$\therefore a+b=(a+b)\left(\frac{4}{b}+\frac{1}{a}\right)=5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 5+4=9$，

当且仅当$\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$且$4a+b=ab$，即$a=3$，$b=6$时，$a+b$有最小值9. ……………………………… 5分

(2)由题意及(1)得

$|x-a|+|x-b|=|x-a|+|b-x|\geqslant|b-a|=3$. ……………………………… 8分

$\because$满足不等式$|x-a|+|x-b|\geqslant t^2-2t$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，

$\therefore 3\geqslant t^2-2t$，解得$-1\leqslant t\leqslant 3$.

故实数t的取值范围为$[-1,3]$. ……………………………… 10分