2018~2019 学年度高三年级第二学期六调考试

文科数学试卷

第一命题人：[redacted]　　第二命题人：[redacted]

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（每小题5分，共60分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1. 设全集 $U=\{x\in N\mid -1<x<5\}$，集合 $A=\{1,3\}$，则集合 C_UA 的子集的个数为（　　）

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

2. 设复数 $z=1+i$（i 是虚数单位），则复数 $z+\frac{1}{z}$ 的虚部是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}i$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}i$

3. 命题“$\forall n\in N, f(n)\in N$ 且 $f(n)>n$”的否定形式是（　　）

A. $\forall n\in N, f(n)\notin N$ 且 $f(n)\le n$　　B. $\forall n\in N, f(n)\notin N$ 或 $f(n)>n$

C. $\exists n_0\in N, f(n_0)\notin N$ 或 $f(n_0)\le n_0$　　D. $\exists n_0\in N, f(n_0)\notin N$ 且 $f(n_0)>n_0$

4. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

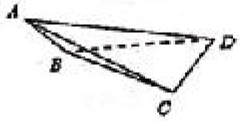
5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_{10}=4$，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{10})$，则 $f'(0)=$（　　）

A. 2^6　　B. 2^9　　C. 2^{12}　　D. 2^{15}

6. 已知 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 2 \\ y\ge 0 \end{cases}$，则 $|3x+4y-12|$ 的最小值为（　　）

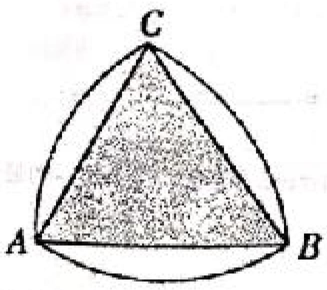
A. 5　　B. 12　　C. 6　　D. 4

7. 把平面图形 M 上的所有点在一个平面上的射影构成的图形 M′ 叫作图形 M 在这个平面上的射影。如图，在三棱锥 A－BCD 中，BD⊥CD，AB⊥DB，AC⊥DC，AB=DB=5，CD=4，将围成三棱锥的四个三角形的面积从小到大依次记为 S_1，S_2，S_3，S_4，设面积为 S_2 的三角形所在的平面为 α，则面积为 S_4 的三角形在平面 α 上的射影的面积是（　　）

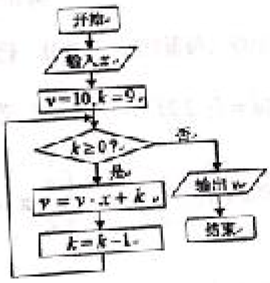


A. $2\sqrt{34}$　　B. $\frac{25}{2}$　　C. 10　　D. 30

8. 法国机械学家莱洛(F. Reuleaux 1829－1905)发现了最简单的等宽曲线莱洛三角形，它是分别以正三角形ABC的顶点为圆心，以正三角形边长为半径作三段圆弧组成的一条封闭曲线，在封闭曲线内随机取一点，则此点取自正三角形ABC之内（如图阴影部分）的概率是（　　）



A. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2\pi-2\sqrt{3}}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi-2\sqrt{3}}$　　C. $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{2\pi}$　　D. $\frac{\pi-\sqrt{3}}{\pi}$



9. 秦九韶是我国南宋时期的数学家，普州（现四川省安岳县）人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法. 如上图的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例，若输入x的值为2，则输出的v值为（　　）

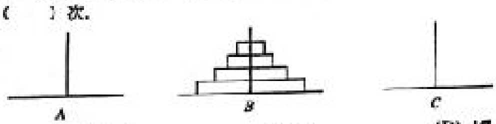
A. $9\times2^{10}-2$　　B. $9\times2^{10}+2$　　C. $9\times2^{11}+2$　　D. $9\times2^{11}-2$

10. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$c\sin(B+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=20$，$c=7$，

则ΔABC的内切圆的半径为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 3　　D. $\sqrt{3}$

11. 如图，汉诺塔问题是指有3根杆子A，B，C. B杆上有若干碟子，把所有碟子从B杆移到A杆上，每次只能移动一个碟子，大的碟子不能叠在小的碟子上面. 把B杆上的4个碟子全部移到A杆上，最少需要移动（　　）次.



(A) 12　　(B) 15　　(C) 17　　(D) 19

12. 已知函数$f(x)=|\cos x|(x\geq0)$的图象与过原点的直线恰有四个交点，设四个交点中横坐标最大值为θ，则$\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}-\frac{1}{\theta\cdot\tan\frac{\theta}{2}}$的值为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

第II卷（非选择题 共90分）

二、填空题（每题5分，共20分. 把答案填在答题纸的横线上）

13. 已知$\vec{a}=(-2,2)$，$\vec{b}=(1,-1)$，若任意向量$\vec{c}$与$\vec{a}+\lambda\vec{b}$共线，则$\lambda=$________.

14. 已知$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，$\beta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，满足$\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\beta$，则$\frac{\sin2\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$的最大值为________.

15. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为2，点P是上底面$A_1B_1C_1D_1$内一动点，若三棱锥$P-ABC$的外接球表面积恰为$\frac{41\pi}{4}$，则此时点P构成的图形面积为________

16. 已知函数$f(x)=(x+2013)(x+2015)(x+2017)(x+2019)$　$x\in R$，则函数$f(x)$的最小值是________

三、解答题（本大题共 6 小题，17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，共 70 分，解答应写出证明过程或演算步骤，写在答题纸的相应位置）

17.（本小题满分 12 分）

已知$\{a_n\}$为公差不等于零的等差数列，S_n为a_n的前 n 项和，且$\left\{\frac{S_n}{n(a_n+1)}\right\}$为常数列.

（1） 求a_1；

（2） $d\in N^*$，设$b_n=\frac{a_n}{a_n-4035}$，仅当 $n=2019$ 时，b_n最大，求a_n.

18.（本小题满分 12 分）

在一次 53.5 公里的自行车个人赛中，25 名参赛选手的成绩（单位：分钟）的茎叶图如下图所示.

8	0 1 2 3 5 6 6 6 6 8 9
9	0 2 3 4 5 5 5 7 9
10	0 0 5 6 7

(1)现将参赛选手按成绩由好到差编为 1～25 号，再用系统抽样方法从中选取 5 人. 已知选手甲的成绩为 85 分钟. 若甲被选取，求被选取的其余 4 名选手的成绩的平均数；

(2)若从总体中选取一个样本，使得该样本的平均水平与总体相同，且样本的方差不大于 7，则称选取的样本具有集中代表性. 试从总体（25 名参赛选手的成绩）选取一个具有集中代表性且样本容量为 5 的样本，并求该样本的方差.

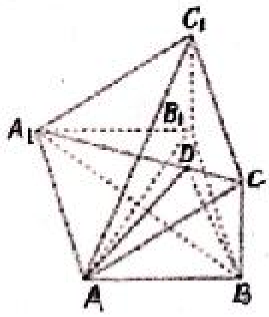
19. （本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形BB_1C_1C是矩形，$AB\perp B_1C_1$,平面$A_1BC\perp$平面AB_1C_1.

(1) 证明：$AA_1=AB$；

(2) 若$B_1C_1=3,AB=4,\angle ABB_1=60^0$,$D$是线段$A_1C$上的一点，且三棱锥

$B-ACD$的体积为$\sqrt{3}$，求$\frac{A_1D}{CD}$的值



20. （本小题满分 12 分）

已知抛物线$C:y^2=2px\ (p>0)$在第一象限内的点$P(2,t)$到焦点F的距离为$\frac{5}{2}$.

（1）若$M\left(-\frac{1}{2},0\right)$，过点$M$，$P$的直线$l$与抛物线相交于另一点$Q$，求$\frac{|QF|}{|PF|}$的值；

（2）若直线l_2与抛物线C相交于A, B两点，与圆$M:(x-a)^2+y^2=1$相交于D, E两点，O为坐标原点，$OA\perp OB$，试问：是否存在实数a，使得$|DE|$的长为定值？若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由.

主

21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+a\ln x$.

（1）当 $a<1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若不等式 $f(x)+(a+1)x\geq\frac{x^2}{2}+x^a+1-e$ 对于任意 $x\in\left[e^{-1},e\right]$ 成立，求正实数 a 的取值范围.

选做题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．（本题满分 10 分）选修 4-4：参数方程与极坐标系

已知直线 $l:x+y-3=0$，曲线 $C:\begin{cases}x=2\cos\theta+2\\y=2\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$. 以坐标原点 O 为极点，$x$ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

（1）分别求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程；

（2）若射线 $m:\theta=\alpha(-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2},\rho\geq0)$ 分别交直线 l 和曲线 C 于 M，N 两点（N 点不同于坐标原点 O），求 $\frac{|ON|}{|OM|}$ 的最大值.

招

23．（本题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x|-|x+3|$.

（1）若对于任意的实数 x，都有 $f(x)\geq2m^2-7m$ 成立，求 m 的取值范围；

（2）若 $g(x)=ax$，方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围.

2018—2019学年度第二学期高三六调试卷数学（文）答案

1—5　BACDD　　6—10　AABCD　　11. B　12. D

13. 2　　14. $\sqrt{2}$.　　15. π　　16. −16

17. 解（1）设$\{a_n\}$首项为a_1，公差为d,则$\frac{S_n}{n(a_n+1)}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n[a_1+(n-1)d+1]}=\frac{a_1+\frac{(n-1)}{2}d}{[a_1+(n-1)d+1]}=c$

整理得：$n\left(\frac{d}{2}-dc\right)+\left(a_1-\frac{d}{2}-a_1c-dc-c\right)=0$　对任意的n恒成立，

只须$\begin{cases} d\left(\frac{1}{2}-c\right)=0 \\ a_1-\frac{d}{2}-a_1c+dc-c=0 \end{cases}$　解得：$c=\frac{1}{2}, a_1=1$　……………… 6分

(2)　由题意可知　$a_n=1+(n-1)d$,

$$b_n=\frac{1+(n-1)d}{(n-1)d-4034}=\frac{nd+1-d}{nd-4034-d}=1+\frac{\frac{4035}{d}}{n-\frac{4034+d}{d}}$$

$\{b_n\}$数列的对称中心为$\left(\frac{4034+d}{d},1\right)$　$2018\le\frac{4034+d}{d}<2019$　解得$\frac{2017}{1009}<d\le 2$

$\because d\in N^*$　$\therefore$　$d=2$,　$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$ ……………………12分

18. 解：(1)将参赛选手按成绩由好到差分为5组，则第一组(80,81,82,83,85)，第二组(86,86,86,88,88)，第三组(89,90,92,93,94)，第四组(95,95,95,97,99)，第五组(100,100,105,106,107)。甲的编号为第一组的第5个，则其余4名选手的成绩分别为88、94、99、107，这4个成绩的平均数为97. ……………… 5分

(2)∵25名参赛选手的成绩的总分为2300，

∴总体的平均数为$\frac{2300}{25}=92$. ……………………………… 8分

具有集中代表性且样本容量为5的一个样本为88、90、93、94、95(或89、90、92、94、95). ……………… 10分

该样本的方差为$s^2=\frac{(88-92)^2+(90-92)^2+(93-92)^2+(94-92)^2+(95-92)^2}{5}=\frac{34}{5}=6.8$(或$s^2=\frac{26}{5}=5.2$).(备注：写出一组即可) ……………………………… 12分

19.

(1)证明：∵在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC//B_1C_1$，$AB_1\perp B_1C_1$，

∴$AB_1\perp BC$ ………………………………………………………… 1分

又∵$BC\perp BB_1$，$AB_1\cap BB_1=B_1$，

∴$BC\perp$平面 AA_1B_1B ………………………………………………… 2分

设 AB_1 与 A_1B 相交于点 E，AC_1 与 A_1C 相交于点 F，连接 EF，

∵四边形 AA_1B_1B 与 AA_1C_1C 均是平行四边形，

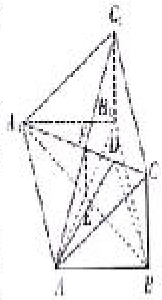
∴$EF//BC$，$EF\perp$平面 AA_1B_1B，

∴$EF\perp AB_1$ ………………………………………………… 4分

又平面 $A_1BC\perp$平面 AB_1C_1，且相交于 EF，

∴$AB_1\perp$平面 A_1BC，∴$AB_1\perp A_1B$ ……………………………… 5分

∴四边形 AA_1B_1B 是菱形，从而 $AA_1=AB$ ……………………………… 6分



(2)解：由(1)可知 $AB_1\perp$平面 A_1BC，

在 $Rt\triangle A_1BC$ 中，$A_1B=4\times\sin 60^\circ\times 2=4\sqrt{3}$，$BC=3$ ……………… 7分

∴$V_{B_1-A_1BC}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 3)\times 2=4\sqrt{3}$ ……………………… 9分

∵$V_{B_1-BCD}=V_{D-B_1BC}=\sqrt{3}$，

∴$\frac{V_{B_1-A_1BC}}{V_{B_1-BCD}}=\frac{A_1C}{CD}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$ ……………………………………… 11分

∴$\frac{A_1D}{CD}=3$ ……………………………………………………………… 12分

20.解析：(1) ∵点 $P(2,t)$，∴$2+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，解得 $p=1$，

故抛物线 C 的方程为：$y^2=2x$，当 $x=2$ 时，$t=2$，

∴l_1 的方程为 $y=\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$，联立 $y^2=2x$ 可得，$x_Q=\frac{1}{8}$，

又∵$|QF|=x_Q+\frac{1}{2}$，$|PF|=x_P+\frac{1}{2}$，∴$\frac{|QF|}{|PF|}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$． ……………………………5分

(2) 设直线 AB 的方程为 $x=ty+m$，代入抛物线方程可得 $y^2-2ty-2m=0$，

2018—2019 学年度第二学期高三六调试卷数学（文）答案

设 $A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-2m$，①

由 $OA\perp OB$ 得：$(ty_1+m)(ty_2+m)+y_1y_2=0$，

整理得 $(t^2+1)y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2=0$，②

将①代入②解得 $m=2$，∴直线 l：$x=ty+2$，

∵圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{1+t^2}}$，∴ $|DE|=2\sqrt{1^2-\dfrac{(a-2)^2}{1+t^2}}$，

显然当 $a=2$ 时，$|DE|=2$，$|DE|$ 的长为定值.　……………………12 分

21. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-a)(x-1)}{x}.$$

若 $0<a<1$，则

当 $0<x<a$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $a<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；　……………………2 分

若 $a\le 0$，则

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；　……………………4 分

综上所述，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减；当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(a,1)$ 上单调递减，在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增.　……………………5 分

(2) 原题等价为对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$，有 $-a\ln x+x^a\le e-1$ 成立，

设 $g(x)=-a\ln x+x^a,a>0$，所以 $g(x)_{max}\le e-1$.

$$g'(x)=\frac{-a}{x}+ax^{a-1}=\frac{a\left(x^a-1\right)}{x}.$$

令 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$；令 $g'(x)>0$，得 $x>1$.

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,e]$ 上单调递增，

$g(x)_{\max}$ 为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=a+e^{-a}$ 与 $g(e)=-a+e^{a}$ 中的较大者. ……………………7分

设 $h(a)=g(e)-g\left(\frac{1}{e}\right)=e^{a}-e^{-a}-2a\ (a>0)$，

则 $h'(a)=e^{a}+e^{-a}-2>2\sqrt{e^{a}\cdot e^{-a}}-2=0$，

所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(a)>h(0)=0$，所以 $g(e)>g\left(\frac{1}{e}\right)$，

从而 $\left[g(x)\right]_{\max}=g(e)=-a+e^{a}$. ……………………9分

所以 $-a+e^{a}\le e-1$ 即 $e^{a}-a-e+1\le 0$.

设 $\varphi(a)=e^{a}-a-e+1\ (a>0)$，则 $\varphi'(a)=e^{a}-1>0$.

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1)=0$，所以 $e^{a}-a-e+1\le 0$ 的解为 $a\le 1$.

因为 $a>0$，所以 a 的取值范围为 $(0,1]$. ……………………12分

22.解：(1) $l:\rho(\cos\theta+\sin\theta)=3$

$C:(x-2)^2+y^2=4\Rightarrow x^2+y^2-4x=0\Rightarrow \rho=4\cos\theta$ ……………………4分

(2) 由已知可设 $M(\rho_1,\alpha),N(\rho_2,\alpha),(-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2})$

则 $\rho_1=\dfrac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha},\rho_2=4\cos\alpha$ ……………………6分

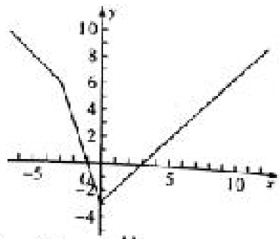
$\therefore\dfrac{|ON|}{|OM|}=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{4}{3}\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{2}{3}(\cos2\alpha+\sin2\alpha+1)$

$=\dfrac{2}{3}\left[\sqrt{2}\cos(2\alpha-\frac{\pi}{4})+1\right]\le\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$

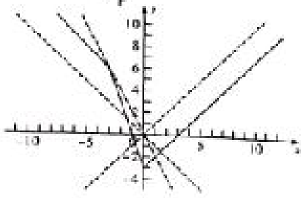
仅当 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时，取得最大值 $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$ ……10分

2018—2019 学年度第二学期高三六调试卷数学（文）答案

23．解：（1） 由于 $f(x)=|2x|-|x+3|=\begin{cases}3-x,(x<-3)\\-3x-3,(-3\le x\le 0),\\x-3,(x>0)\end{cases}$



所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-3$。又因为对任意的实数 x，都有 $f(x)\ge 2m^2-7m$ 成立，只需 $2m^2-7m\le -3$，即 $2m^2-7m+3\le 0$，解得 $\frac{1}{2}\le m\le 3$，故 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},3\right]$。………5 分



（2）方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解，即函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像有两个不同的交点，作出这两个函数图像，由图像可知，a 得取值范围是 $[-1,1)\cup\{-2\}$………10 分