鹰潭市 2023 届高三第二次模拟考试数学答案(理科)

一、单选题　DBCBA　ACBCA　DC

二、填空题　13.240,　14. $\frac{31}{42}$　15. π　16. $\frac{4}{3}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.解：（1）由 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，且 $\frac{S_1}{1}=1$，

则 $\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，．........2 分

即 $2S_n=n^2+n$，当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$，

两式相减可得：$2a_n=2n$，即 $a_n=n,n\ge 2$，

因为 $a_1=1$ 满足上式，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$　...........6 分

（2）由（1）可得 $b_n=2^{a_n}=2^n$，所以 $T_{2n-1}=\frac{2\left(1-2^{2n-1}\right)}{1-2}=2^{2n}-2=4^n-2$，..........8 分

又 $4^n=(3+1)^n=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}3^1+1$，因为 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^{n-1}$ 均为正整数，所以存在正整数 k 使得 $4^n=3k+1$，故 $T_{2n-1}=4^n-2=3k-1$，所以 T_{2n-1} 除以 3 的余数为 2　..................12 分

18.解:（1）每小组投进的次数之和不少于 3 次的称为“神投小组”,则可能的情况有①甲投中一次,乙投中两次;②甲投中两次,乙投中一次;③甲投中两次,乙投中两次,$\because p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{2}{3}$，$\therefore$他们在第一轮游戏获得“神投小组”称号的概率为 $C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ ....4 分

（2）①由题意得他们在一轮游戏获得“神投小组”称号

的概率 $p=C_2^1\cdot p_1(1-p_1)p_2^2+p_1^2C_2^1\cdot p_2(1-p_2)+p_1^2\cdot p_2^2=2p_1p_2(p_1+p_2)-3p_2^2\cdot p_1^2$,

$\because p_1+p_2=\frac{6}{5}$，$\therefore p=\frac{12}{5}p_1p_2-3p_2^2\cdot p_1^2$,

又 $0\le p_1\le 1,0\le p_2\le 1,p_1+p_2=\frac{6}{5}$,则 $\frac{1}{5}\le p_1\le 1$，

令 $m=p_1p_2=-p_1^2+\frac{6}{5}p_1=-\left(p_1-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{25}$,则 $m\in\left[\frac{1}{5},\frac{9}{25}\right]$,

$\therefore p=y(m)=-3m^2+\frac{12}{5}m=-3\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{12}{25}$,

$\because p=-3m^2+\frac{12}{5}m$ 在 $\left[\frac{1}{5},\frac{9}{25}\right]$ 上单调递增,则 $p_{\max}=y\left(\frac{9}{25}\right)=\frac{297}{625}$,此时 $p_1=p_2=\frac{3}{5}$ ....8 分

②他们小组在 n 轮游戏中获得“神投小组”称号的次数 ξ 满足 $\xi\sim B\left(n,\frac{297}{625}\right)$,

$\because np=297$,则 $n=\frac{297}{\frac{297}{625}}=625$,$\therefore$平均要进行 625 轮游戏...........12 分

19. 解：(1)因为在三棱柱中，O 为 A_1 在底面投影，所以 $A_1O\perp$ 面 ABC，CC_1 // 面 A_1AB ....2 分

又因为 O 为 AB 中点，所以 $OA=\dfrac{AB}{2}=1$，$AC=2$，所以 $OC=\sqrt{3}$.

因为 AA_1 与底面 ABC 内所有直线所成角中的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $A_1O\perp$ 面 ABC，

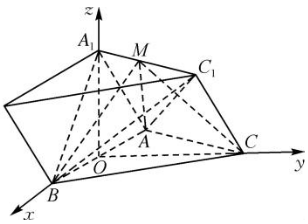
所以 $\angle A_1AB=\dfrac{\pi}{4}$， $OA_1=OA=1$， ....4 分

所以 $V_{A_1-ABC_1}=V_{C_1-ABA_1}=V_{C-ABA_1}=V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1O=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ....5 分

(2)以 O 为原点，OB，OC，OA_1 为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

可得 $O(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(0,\sqrt{3},0)$， $A(-1,0,0)$， $A_1(0,0,1)$， ....6 分

又因为 $3A_1M=A_1C_1$，所以 $M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，



所以 $\overrightarrow{BM}=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$， $\overrightarrow{BA}=(-2,0,0)$， $\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$． ....7 分

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 ABM 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1+z_1=0,\\ -2x_1=0,\end{cases}$，

令 $z_1=1$，则 $\vec{m}=(0,-\sqrt{3},1)$；（9 分）设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 CBM 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x_2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_2+z_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}y_2=0,\end{cases}$， 令 $x_2=3$， 则 $\vec{n}=(3,\sqrt{3},1)$.............10 分

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{(0,-\sqrt{3},1)\cdot(3,\sqrt{3},1)}{2\times\sqrt{13}}=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$． ....11 分

所以二面角 $A-BM-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$． ....12 分

20. 解：（1）双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ . ...4 分

（2）由双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的方程可得 $a=\sqrt{3},b=1,c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，

由题意可得点 $B(1,0)$，则有：当直线 l 与 y 轴垂直时，则 $M(-\sqrt{3},0),N(\sqrt{3},0)$，

可得直线 $AM:y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$，令 $x=1$，则 $y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即点 $P\left(1,-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

同理可得：点 $Q\left(1,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，故 $|PB|=|BQ|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}=1$； ....5 分

当直线 l 不与 y 轴垂直时，设直线 $l:x=ty+1,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}x=ty+1\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$，消去 x 得 $(t^2-3)y^2+2ty-2=0$，

则$\Delta>0, y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2-3}, y_1+y_2=-\dfrac{2}{t^2-3}$，……….6 分

可得直线$AM: y=\dfrac{y_1+\sqrt{2}}{x_1-3}(x-3)-\sqrt{2}=\dfrac{y_1+\sqrt{2}}{ty_1-2}(x-3)-\sqrt{2}$，

令$x=1$，则$y=\dfrac{y_1+\sqrt{2}}{ty_1-2}\times(-2)-\sqrt{2}=-\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)y_1}{ty_1-2}$，

即点$P\left(1,-\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)y_1}{ty_1-2}\right)$，同理可得：$Q\left(1,-\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)y_2}{ty_2-2}\right)$……….8 分

$\because \dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)y_1}{ty_1-2}+\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)y_2}{ty_2-2}=\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)\left[\left(ty_2-2\right)y_1+\left(ty_2-2\right)y_1\right]}{\left(ty_1-2\right)\left(ty_2-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)\left[2ty_1y_2-2\left(y_1+y_2\right)\right]}{\left(ty_1-2\right)\left(ty_2-2\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{2}t+2\right)\left(-\dfrac{4t}{t^2-3}+\dfrac{4t}{t^2-3}\right)}{\left(ty_1-2\right)\left(ty_2-2\right)}=0$，……….10 分

即点P,Q关于x轴对称，故$|PB|=|BQ|$，即$\dfrac{|PB|}{|BQ|}=1$；综上所述：$\dfrac{|PB|}{|BQ|}$的值为 1. ……….12 分

21.解：（1）$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$　$f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x}+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\ln x+1}{x}$, ……….1 分

记$h(x)=x-\ln x+1, h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, 当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，……….3 分

故$h(x)\geq h(1)=2>0, \therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ……….4 分

（2）$g(x)$定义域为 R，$g'(x)=xe^x-ax=x\left(e^x-a\right)$，

①当$a=0$时，$g(x)=(x-1)e^x$有唯一零点$x=1$，符合题意；　……….5 分

②当$a<0$时，$e^x-a>0$，当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0, g(x)$在$(-\infty,0)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0, g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，故$g(x)_{\min}=g(0)=a^2-1$，……….6 分

若$a<-1$，则$g(x)>g(0)>0, g(x)$无零点，不符题意；

若$a=-1$，$g(x)$有唯一零点$x=0$，符合题意；

若$-1<a<0$，则$g(0)=a^2-1<0$，又$g(1)=a^2-\dfrac{1}{2}a>0$，

$x<-1$时，$(x-1)e^x>x-1>2x$，$a^2>0$，$\therefore g(x)>2x-\dfrac{ax^2}{2}=\dfrac{x}{2}(4-ax), \therefore g(\dfrac{4}{a})>0$，

故$g(x)$在$(0,1),(\dfrac{4}{a},0)$内各有一个零点，函数有两个零点，不符题意；……….8 分

③当$0<a<1$时，当$x\in(\ln a,0)$时，$g'(x)<0$, 当$x\in(-\infty,\ln a)\cup(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$,

则$g(x)$在$(-\infty,\ln a),(0,+\infty)$上单调递增，在$(\ln a,0)$上单调递减，

又$g(\ln a)=a(\ln a-1)-\dfrac{a(\ln a)^2}{2}+a^2=af(a)<af(1)=0$，……….9 分

$x>1$时，令$m(x)=e^x-x^2, \therefore m'(x)=e^x-2x$，令$n(x)=e^x-2x, \therefore n'(x)=e^x-2>0$,

即$m'(x)=e^x-2x$在$(1,+\infty)$单调递增，故$m'(x)>m(1)=e-2>0$，

故$m(x)=e^x-x^2$在$(1,+\infty)$单调递增，则$m(x)>m(1)=e-1>0$，

所以$e^x>x^2$，故$g(x)>(x-1)x^2-\dfrac{ax^2}{2}=x^2(x-1-\dfrac{a}{2})$，则$g(\dfrac{a}{2}+1)>0$，……….10 分

故$g(x)$此时在$(\ln a,\dfrac{a}{2}+1)$上有唯一零点，符合题意；综上，a的取值范围为$\{-1\}\cup[0,1)$. ……….12 分

22.解：（1）根据曲线C_2的极坐标方程为$\rho=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+3\cos2\theta}}$可得，

$\rho^2\left(2+6\cos^2\theta\right)=8$，即$8x^2+2y^2=8$，所以曲线$C_2$的直角坐标方程为$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$；

根据圆锥曲线参数方程定义可得，曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}$，（$\varphi$为参数）. ....5 分

（2）由曲线C_1的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$可得，

曲线C_1的直角坐标方程为$(x-1)^2+y^2=1$，其圆心$C_1(1,0)$，半径$r=1$；由题意可得设$B(\cos\varphi,2\sin\varphi)$，

易知A,B之间距离的最大值为点B到圆心C_1的距离的最大值再加上半径，

即$|AB|_{\max}=|BC_1|+r=\sqrt{(\cos\varphi-1)^2+(2\sin\varphi)^2}+1=\sqrt{-3\cos^2\varphi-2\cos\varphi+5}+1$，

由二次函数性质可知，当$\cos\varphi=-\dfrac{1}{3}$时，$|AB|_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1$；

所以A,B之间距离的最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1$ ....10 分

23. 解：（1）由$m^2+n^2=4m^2n^2$，得$\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=4$，

又$\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\ge\dfrac{2}{mn}$，所以$mn\ge\dfrac{1}{2}$，当且仅当$m=n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，

而$\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{3}{2}}\right)=m^2+n^2+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{3}{2}}=4m^2n^2+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}(m+n)$

$\ge4m^2n^2+2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{mn}=4m^2n^2+2mn\ge4\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{2}=2$，

当且仅当$m=n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立.故$\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{3}{2}}\right)\ge2$ ....5 分

（2）$\dfrac{1}{m^4}+\dfrac{1}{n^4}=\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2-\dfrac{2}{m^2n^2}=16-\dfrac{2}{(mn)^2}\ge16-\dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8$，

当且仅当$m=n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立.故$\dfrac{1}{m^4}+\dfrac{1}{n^4}\ge8$ ....10 分