

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

## 数 学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

### 第Ⅰ卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

- 如果事件 $A$ ， $B$ 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 如果事件 $A$ ， $B$ 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。
- 圆柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 $S$ 表示圆柱的底面面积， $h$ 表示圆柱的高。
- 棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 $S$ 表示棱锥的底面面积， $h$ 表示棱锥的高。

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ， $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$

- (A)  $\{2\}$                       (B)  $\{2, 3\}$                       (C)  $\{-1, 2, 3\}$                       (D)  $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设变量 $x$ ， $y$ 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为

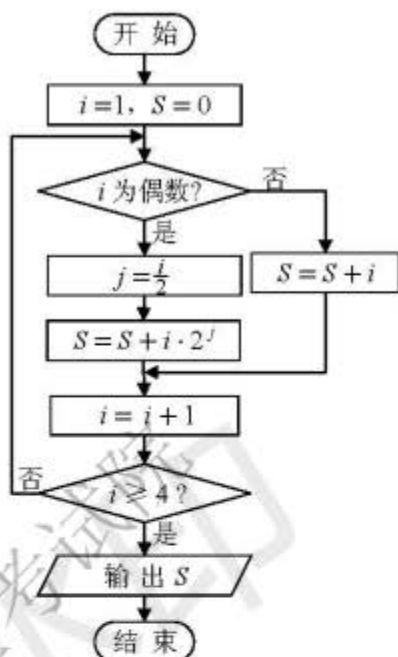
- (A) 2                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 6

(3) 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则 “ $x^2 - 5x < 0$ ” 是 “ $|x-1| < 1$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件  
 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件  
 (D) 既不充分也不必要条件

(4) 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 输出  $S$  的值为

- (A) 5                      (B) 8  
 (C) 24                    (D) 29



第(4)题图

(5) 已知抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ . 若  $l$  与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两条渐近线分别交于点  $A$  和点  $B$ , 且  $|AB| = 4|OF|$  ( $O$  为原点), 则双曲线的离心率为

- (A)  $\sqrt{2}$                       (B)  $\sqrt{3}$   
 (C) 2                            (D)  $\sqrt{5}$

(6) 已知  $a = \log_5 2$ ,  $b = \log_5 0.2$ ,  $c = 0.5^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- (A)  $a < c < b$               (B)  $a < b < c$               (C)  $b < c < a$               (D)  $c < a < b$

(7) 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$ ) 是奇函数, 将  $y = f(x)$  的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为  $g(x)$ . 若

$g(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ , 且  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ , 则  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$

- (A) -2                      (B)  $-\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt{2}$                       (D) 2

(8) 已知  $a \in \mathbf{R}$ . 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$  若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq 0$  在  $\mathbf{R}$  上

恒成立, 则  $a$  的取值范围为

- (A)  $[0, 1]$                       (B)  $[0, 2]$                       (C)  $[0, e]$                       (D)  $[1, e]$

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

## 数 学（理工类）

### 第Ⅱ卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

(9)  $i$  是虚数单位，则  $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$  的值为\_\_\_\_\_.

(10)  $\left( 2x - \frac{1}{8x^3} \right)^8$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_.

(11) 已知四棱锥的底面是边长为  $\sqrt{2}$  的正方形，侧棱长均为  $\sqrt{5}$ . 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为\_\_\_\_\_.

(12) 设  $a \in \mathbf{R}$ ，直线  $ax - y + 2 = 0$  和圆  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 相切，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

(13) 设  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + 2y = 5$ , 则  $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

(14) 在四边形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $AD = 5$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , 点  $E$  在线段  $CB$  的延长线上, 且  $AE = BE$ , 则  $\vec{BD} \cdot \vec{AE} =$ \_\_\_\_\_.

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(15) (本小题满分 13 分)

在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ 。已知  $b+c=2a$ ， $3c\sin B=4a\sin C$ 。

(I) 求  $\cos B$  的值；

(II) 求  $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$  的值。

(16) (本小题满分 13 分)

设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为  $\frac{2}{3}$ 。假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立。

(I) 用  $X$  表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，求随机变量  $X$  的分布列和数学期望；

(II) 设  $M$  为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件  $M$  发生的概率。

(17) (本小题满分 13 分)

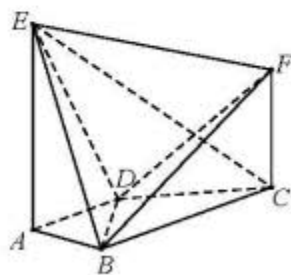
如图， $AE \perp$  平面  $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB=AD=1$ ， $AE=BC=2$ 。

(I) 求证： $BF \parallel$  平面  $ADE$ ；

(II) 求直线  $CE$  与平面  $BDE$  所成角的正弦值；

(III) 若二面角  $E-BD-F$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ，求线段

$CF$  的长。



(18) (本小题满分 13 分)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ , 上顶点为  $B$ . 已知椭圆的短轴长为 4,

离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设点  $P$  在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点  $M$  为直线  $PB$  与  $x$  轴的交点, 点  $N$  在  $y$  轴的负半轴上. 若  $|ON| = |OF|$  ( $O$  为原点), 且  $OP \perp MN$ , 求直线  $PB$  的斜率.

(19) (本小题满分 14 分)

设  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列. 已知  $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 6$ ,  $b_2 = 2a_2 - 2$ ,  $b_3 = 2a_3 + 4$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 设数列  $\{c_n\}$  满足  $c_1 = 1$ ,  $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases}$  其中  $k \in \mathbf{N}^*$ .

(i) 求数列  $\{a_{2^n} (c_{2^n} - 1)\}$  的通项公式;

(ii) 求  $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(20) (本小题满分 14 分)

设函数  $f(x) = e^x \cos x$ ,  $g(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 当  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  时, 证明  $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$ ;

(III) 设  $x_n$  为函数  $u(x) = f(x) - 1$  在区间  $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  内的零点, 其中  $n \in \mathbf{N}$ ,

证明  $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_n - \cos x_n}$ .