高三数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

密 封 线 内 不 要 答 题

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{1-x}\}$，$B=\{x|x^2<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-\infty,1]$

B. $[0,\sqrt{3}]$

C. $(-\sqrt{3},1]$

D. $[1,\sqrt{3})$

2. 已知复数 $(1+2i)(z-1)=-2+i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

3. 已知 $\sin\theta=\frac{1}{5}$，则 $\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{23}{25}$　　D. $-\frac{23}{25}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,2-m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

5. 某工厂随机抽取部分工人，对他们某天生产的产品件数进行了统计，统计数据如表所示，则该组数据的产品件数的第 60 百分位数是

件数	7	8	9	10	11
人数	3	6	5	4	2

A. 8.5　　B. 9　　C. 9.5　　D. 10

6. 根据《民用建筑工程室内环境污染控制标准》，文化娱乐场所室内甲醛浓度 $\leqslant 0.1\ \mathrm{mg/m^3}$ 为安全范围. 已知某新建文化娱乐场所竣工时室内甲醛浓度为 $6.05\ \mathrm{mg/m^3}$，使用了甲醛喷剂并处于良好的通风环境下时，室内甲醛浓度 $y(t)$（单位：$\mathrm{mg/m^3}$）与竣工后保持良好通风的时间 $t(t\in\mathbf{N})$（单位：周）近似满足函数关系式 $y=0.05+\lambda e^{-t}(\lambda\in\mathbf{R})$，则该文化娱乐场所竣工后的甲醛浓度要达到安全开放标准，至少需要放置的时间为($\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$，$\ln 5\approx 1.6$)

A. 5 周　　B. 6 周　　C. 7 周　　D. 8 周

7. 已知点 E 是球 O 内一点，过点 E 作球 O 的截面，其中最大截面圆的面积为 4π，最小截面圆的面积为 π，则 OE 的值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 对任意的正实数 x，y，$\sqrt{x}+\sqrt{5y}\leqslant k\sqrt{x+y}$ 恒成立，则 k 的最小值为

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}$

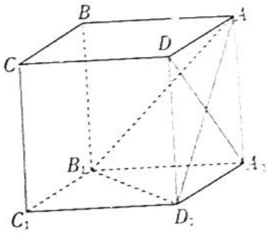
二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. $ab+b-a-1=0$ 的一个充分不必要条件可以是

A. $a=-1$　　B. $a=b$

C. $b=1$　　D. $ab=1$

10. 如图所示，已知几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，则



A. $A_1D\perp$ 平面 AB_1D_1

B. $A_1D//$ 平面 B_1C_1CB

C. 异面直线 A_1D 与 AB_1 所成的角为 60°

D. $A_1D\perp B_1D_1$

11. 设函数 $f(x)=2\cos^2(\omega x-\frac{\pi}{3})-1(\omega>0)$，则下列结论正确的是

A. 若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，$|x_1-x_2|_{\min}=\pi$，则 $\omega=1$

B. 存在 $\omega\in(0,1)$，使得 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称

C. 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 个零点，则 ω 的取值范围为 $[\frac{19}{12},\frac{25}{12})$

D. $\forall\omega\in(0,1)$，$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(2)=2$，$f(x)+f(2-x)=2$，$f(5x)=2f(x)$. 当 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则

A. $f(1)=1$　　B. $f(\frac{9}{8})=\frac{25}{16}$　　C. $f(\frac{47}{25})=\frac{3}{2}$　　D. $f(\frac{1}{1000})=\frac{1}{16}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 抛物线 $y^2=6x$ 的准线恰好平分圆 C：$x^2+y^2-ax-(a+1)y=0$ 的周长，则 $a=$ ▲ .

14. 已知函数 $f(x)=x\ln x+mx+1$ 的零点恰好是 $f(x)$ 的极值点，则 $m=$ ▲ .

15. 某足球比赛共有六支球队参赛（包括甲、乙、丙三支球队），以抽签方式将这六支球队平均分为三组，甲、乙、丙三支球队都分在不同组的概率为 ▲ .

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是椭圆上一点，且直线 PF_1 的斜率为 $\frac{4}{3}$，若半径为 b 的圆 M 同时与 F_1P 的延长线、F_1F_2 的延长线以及线段 PF_2 相切，则椭圆的离心率为 ▲ .

四、解答题：本大题共6小题，共70分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a，b，c，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{b(2b-c)}{2}$.

（1）求A；

（2）若$c<b$，$b+c=\sqrt{2}a$，求$\sin C$.

18.（12分）

冬奥会全称是冬季奥林匹克运动会，是世界规模最大的冬季综合性运动会，每四年举办一届. 2022年冬季奥运会由中国北京承办，本届赛事共设7个大项，15个分项，109个小项，共计产生109枚金牌. 某校组织了一次有关冬奥会的知识竞赛，知识竞赛试卷中有一类双项选择题，每题有4个备选项，其中有且仅有2项是正确的. 得分规则如下：所选选项中，只要有错误选项，得0分；弃答得1分；仅选1项且正确，得2分；选2项且正确得6分.

（1）同学甲在一道双项选择题中随机选择两个选项，求甲在该题获得0分的概率.

（2）学生乙对其中一道双项选择题只能确定1个选项是错误的，现有2个策略：①从剩下3个选项中任选1个作答；②从剩下3个选项中任选2个作答. 为使得分的期望最大，乙应该选择哪一个策略？

19.（12分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=9$，$a_3=45$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$为等比数列.

（1）证明：$\{\frac{a_n}{3^n}\}$是等差数列，并求出$\{a_n\}$的通项公式.

（2）求$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

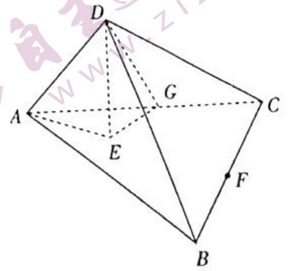
3
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

20.(12分)

如图,点 E 在$\triangle ABC$内,DE是三棱锥$D-ABC$的高,且$DE=2$.$\triangle ABC$是边长为6的正三角形,$DB=DC=5$,F为BC的中点.

(1)证明:点E在AF上.

(2)点G是棱AC上一点(不含端点),求平面DEG与平面BCD夹角余弦值的最大值.



21.(12分)

已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F(4,0)$到渐近线的距离为$2\sqrt{3}$.

(1)求双曲线C的方程.

(2)过点F的直线与双曲线C的右支交于A,B两点,在x轴上是否存在点P,使得点F到直线PA、PB的距离相等?若存在,求出点P的坐标;若不存在,说明理由.

22.(12分)

已知函数$f(x)=ae^{2x}-3x$.

(1)当$a=1$时,求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2)若$\frac{f(x)}{e^x}>-a$在$(0,+\infty)$上恒成立,求整数a的最小值.

高三数学参考答案

1. C 【解析】本题考查集合的交集运算，考查运算求解能力.
因为 $A=(-\infty,1]$，$B=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，所以 $A\cap B=(-\sqrt{3},1]$.

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算，考查运算求解能力.
$z=\frac{-2+i}{1-2i}+1=\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+1=\frac{5i}{5}+1=1+i$，则 $|z|=\sqrt{2}$.

3. D 【解析】本题考查三角恒等变换，考查运算求解能力.
$\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})=-\cos 2\theta=2\sin^2\theta-1=-\frac{23}{25}$.

4. D 【解析】本题考查平面向量，考查运算求解能力.
由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $m+4-2m=0$，则 $m=4$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

5. B 【解析】本题考查百分位数，考查数据分析的核心素养.
抽取的工人总数为 20，$20\times60\%=12$，那么第 60 百分位数是第 12 和第 13 件数的平均数，第 12 和第 13 件数分别为 9，9，所以第 60 百分位数是 9.

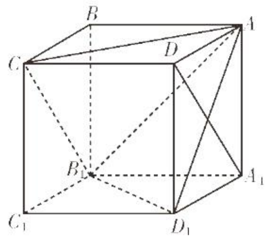
6. A 【解析】本题考查指数、对数的运算，考查数学建模的核心素养.
依题意可知当 $t=0$ 时，$y=6.05$，即 $0.05+\lambda=6.05$，$\lambda=6$，所以 $y=0.05+6e^{-t}$.
由 $y=0.05+6e^{-t}\leqslant0.1$，得 $e^{-t}\leqslant\frac{1}{120}$，解得 $t\geqslant\ln 120=3\ln 2+\ln 3+\ln 5\approx4.8$，至少需要放置的时间为 5 周.

7. C 【解析】本题考查球的空间结构，考查空间想象能力.
由题可知，球 O 的半径 $R=2$，最小截面圆的半径 $r=1$，所以 $OE=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$.

8. B 【解析】本题考查基本不等式的应用，考查逻辑推理的核心素养.
依题意得 $k\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$. 因为 $(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}})^2=\frac{x+5y+2\sqrt{5xy}}{x+y}$，$2\sqrt{5xy}=2\sqrt{5x\cdot y}\leqslant5x+y$，
所以 $(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}})^2=\frac{x+5y+2\sqrt{5xy}}{x+y}\leqslant\frac{x+5y+5x+y}{x+y}=6$，当且仅当 $y=5x$ 时，等号成立.
所以 $k\geqslant\sqrt{6}$，则 k 的最小值为 $\sqrt{6}$.

9. AC 【解析】本题考查充分必要条件，考查逻辑推理的核心素养.
由 $ab+b-a-1=0$，可得 $(a+1)(b-1)=0$，解得 $a=-1$ 或 $b=1$. 故选 AC.

10. BC 【解析】本题考查点线面的位置关系，考查空间想象能力.



连接 B_1C，AC，易知 $A_1D// B_1C$，所以 $A_1D//$ 平面 B_1C_1CB，异面直线 A_1D 与 AB_1 所成的角为 60°. 故选 BC.

11. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象，考查逻辑推理的核心素养.
因为 $f(x)=2\cos^2(\omega x-\frac{\pi}{3})-1=\cos(2\omega x-\frac{2\pi}{3})$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$.
对于 A，因为 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，$|x_1-x_2|_{\min}=\pi$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$，所以 $\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，得 $\omega=\frac{1}{2}$. 故 A 错误.
对于 B，若图象变换后得到的函数 $y=\cos(2\omega x+\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{2\pi}{3})$ 图象关于原点对称，则 $\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，
解得 $\omega=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}k$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$\omega=\frac{1}{4}\in(0,1)$. 故 B 正确.
对于 C，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$2\omega x-\frac{2\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},2\pi\omega-\frac{2\pi}{3}]$，因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 个零点，所以 $\frac{5\pi}{2}\leqslant$

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$2\pi\omega-\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，解得$\frac{19}{12}\leqslant\omega<\frac{25}{12}$. 故C正确.

对于D，当$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$时，$2\omega x-\frac{2\pi}{3}\in[-\frac{\omega\pi}{3}-\frac{2\pi}{3},\frac{\omega\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}]$. 因为$\omega\in(0,1)$，所以$-\frac{\omega\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\in(-\pi,-\frac{2\pi}{3})$，$\frac{\omega\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\in(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6})$，所以$f(x)$在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上单调递增. 故D正确.

12. ACD 【解析】本题考查抽象函数的应用，考查逻辑推理的核心素养.

由题可知，$f(2)=2$，$f(1)=1$，$f(\frac{2}{5})=\frac{1}{2}f(2)=1$，$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称. 因为当$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，所以当$x\in[\frac{2}{5},\frac{8}{5}]$时，$f(x)=1$. 又$f(\frac{1}{1000})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{200})=\frac{1}{4}f(\frac{1}{40})=\frac{1}{8}f(\frac{1}{8})=\frac{1}{16}f(\frac{5}{8})=\frac{1}{16}$，$f(\frac{47}{25})=2-f(\frac{3}{25})=2-\frac{1}{2}f(\frac{3}{5})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以$f(\frac{9}{8})=1$.

13. -3 【解析】本题考查抛物线和圆的方程，考查运算求解能力.

抛物线$y^2=6x$的准线为$x=-\frac{3}{2}$. 又圆$C:x^2+y^2-ax-(a+1)y=0$，则圆心坐标为$(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2})$，所以$-\frac{3}{2}=\frac{a}{2}$，解得$a=-3$.

14. -1 【解析】本题考查函数的零点以及极值点，考查运算求解能力.

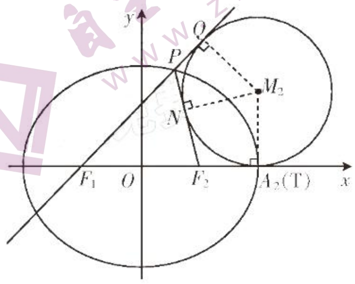
设x_0是$f(x)=x\ln x+mx+1$的零点，也是$f(x)$的极值点，则$f'(x)=\ln x+1+m$，所以$\begin{cases}x_0\ln x_0+mx_0+1=0,\\ \ln x_0+1+m=0,\end{cases}$解得$x_0=1$，$m=-1$.

15. $\frac{2}{5}$ 【解析】本题考查排列组合，考查逻辑推理的核心素养.

将这六支球队分为三组，则一共有$\frac{C_6^2C_4^2}{A_3^3}=15$种，

甲、乙、丙三支球队都分在不同组，则有$A_3^3=6$种，故所求概率为$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

16. $\frac{3}{5}$ 【解析】本题考查椭圆的定义，考查逻辑推理的核心素养.



设圆M分别与F_1P的延长线，F_1F_2的延长线以及线段PF_2相切于点Q,T,N，则$|PQ|=|PN|$，$|F_2N|=|F_2T|$，$|F_1Q|=|F_1T|$，

所以$2|F_1T|=|F_1T|+|F_1Q|=|F_1F_2|+|F_2T|+|PF_1|+|PQ|=|F_1F_2|+|PF_1|+|PF_2|=2c+2a$，所以$\tan\angle MF_1T=\frac{b}{a+c}$. 又因为$\angle PF_1T=2\angle MF_1T$，所以$\frac{2\tan\angle MF_1T}{1-\tan^2\angle MF_1T}=\frac{4}{3}$，解得$\tan\angle MF_1T=\frac{1}{2}$，

即$\frac{1}{2}=\frac{b}{a+c}$，又$b^2=a^2-c^2$，解得$\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，所以椭圆的离心率为$\frac{3}{5}$.

17. 解：(1)因为$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{b(2b-c)}{2}$，所以$ab\cos C=\frac{b(2b-c)}{2}$，即$2b=c+2a\cos C$. ………………………… 1分

由正弦定理可得$2\sin B=\sin C+2\sin A\cos C$， ………………………… 2分

且$2\sin B=2\sin(A+C)=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$， ………………………… 3分

所以$\sin C=2\cos A\sin C$，且$\sin C\neq 0$. ………………………… 4分

则$\cos A=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5分

(2)因为$b+c=\sqrt{2}a$，由正弦定理得$\sin B+\sin C=\sqrt{2}\sin A$. ………………………… 6分

又$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C+\sin C=\frac{\sqrt{6}}{2}$． …………………………………… 7 分

整理可得 $\frac{3}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $\frac{3}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\sqrt{3}\sin(C+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

所以 $\sin(C+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$． …………………………………… 8 分

所以 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 或 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，即 $C=\frac{\pi}{12}$ 或 $C=\frac{7\pi}{12}$． …………………………………… 9 分

因为 $c<b$，所以 $C=\frac{\pi}{12}$，则 $\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$． …………………………………… 10 分

18．解：(1)同学甲随机选择两个选项共有 $C_4^2=6$ 种情况， …………………………………… 2 分

所以甲在该题获得 0 分的概率为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$． …………………………………… 4 分

(2)设策略①的得分为 X，X 的可能取值为 0，2． …………………………………… 5 分

$P(X=0)=\frac{1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_3^1}=\frac{2}{3}$． …………………………………… 6 分

则 X 的分布列为

X	0	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

…………………………………… 7 分

$E(X)=0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$． …………………………………… 8 分

设策略②的得分为 Y，Y 的可能取值为 0，6， …………………………………… 9 分

$P(Y=6)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，$P(Y=0)=1-P(Y=6)=\frac{2}{3}$， …………………………………… 10 分

则 Y 的分布列为

Y	0	6
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

…………………………………… 11 分

$E(Y)=0\times\frac{2}{3}+6\times\frac{1}{3}=2$，

显然 $E(Y)>E(X)$，所以应选策略②． …………………………………… 12 分

19．(1)证明：$\{a_{n+1}-3a_n\}$ 的公比 $q=\frac{a_3-3a_2}{a_2-3a_1}=3$， …………………………………… 1 分

所以 $a_{n+1}-3a_n=6\times3^{n-1}$，即 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}$， …………………………………… 3 分

所以 $\{\frac{a_n}{3^n}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列． …………………………………… 4 分

则 $\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(n-1)$，即 $a_n=(2n-1)3^{n-1}$． …………………………………… 6 分

(2)解：$S_n=1\times3^0+3\times3^1+\cdots+(2n-3)3^{n-2}+(2n-1)3^{n-1}$，① …………………………………… 7 分

①×3 得，$3S_n=1\times3^1+3\times3^2+\cdots+(2n-3)3^{n-1}+(2n-1)3^n$，② …………………………………… 8 分

②－①得，$2S_n=-1\times3^0-2\times3^1-2\times3^2-\cdots-2\times3^{n-1}+(2n-1)3^n$

$=-1\times3^0-\frac{2\times3^1-2\times3^n}{1-3}+(2n-1)3^n$． …………………………………… 10 分

所以 $S_n=(n-1)3^n+1$. …………………………………………………… 12 分

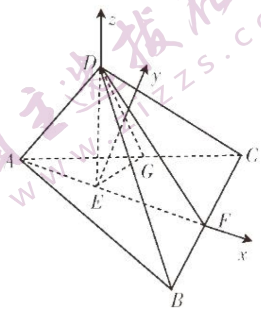
20. (1)证明:连接 EF,DF.

因为 DE 是三棱锥 $D-ABC$ 的高,即 $DE\perp$平面 ABC,所以 $DE\perp BC$. …… 1 分

因为 $DB=DC$,所以 $DF\perp BC$, …………………………………… 2 分

又 $DF\cap DE=D$,所以 $BC\perp$平面 DEF,所以 $BC\perp EF$. ……………… 3 分

又 $BC\perp AF$,所以点 E 在 AF 上. …………………………………… 5 分



(2)解:以 E 为坐标原点,$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}$的方向分别为 x,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(-\sqrt{3},0,0),B(2\sqrt{3},-3,0),C(2\sqrt{3},3,0),D(0,0,2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{3},3,2),\overrightarrow{BA}=(-3\sqrt{3},3,0),\overrightarrow{BC}=(0,6,0)$. ……………… 7 分

设平面 BCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_2-3y_2+2z_2=0,\\6y_2=0,\end{cases}$取 $x_2=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,3)$. …………………… 8 分

$\overrightarrow{AC}=(3\sqrt{3},3,0)$,设$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda\in(0,1)$.

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\lambda\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},0,0)+\lambda(3\sqrt{3},3,0)=(3\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},3\lambda,0)$. …………………… 9 分

设平面 DEG 的法向量 $\boldsymbol{u}=(x_3,y_3,z_3)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{ED}\cdot\boldsymbol{u}=0,\\\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{u}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2z_3=0,\\(3\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})x_3+3\lambda y_3=0,\end{cases}$取 $x_3=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{u}=(\sqrt{3},\frac{1}{\lambda}-3,0)$. …………………… 10 分

$$\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3+(\frac{1}{\lambda}-3)^2}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+(\frac{1}{\lambda}-3)^2}}\leqslant\frac{1}{2},$$

当且仅当 $\lambda=\frac{1}{3}$时,等号成立.

故平面 DEG 与平面 BCD 夹角余弦值的最大值为$\frac{1}{2}$. …………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题可知 $a^2+b^2=16$, …………………………………………………… 1 分

又 $bx-ay=0$ 是双曲线 C 的一条渐近线, ………………………………………… 2 分

所以 $\frac{4b}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{3}$,解得 $b=2\sqrt{3}$, …………………………………………… 3 分

所以 $a=\sqrt{16-b^2}=2$, …………………………………………………………… 4 分

所以双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. …………………………………………… 5 分

(2)假设存在 $P(n,0)$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

设直线 AB:$x=my+4(m\neq0)$,则$\begin{cases}x=my+4,\\\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$得$(3m^2-1)y^2+24my+36=0$,

则$\begin{cases}3m^2-1\neq0,\\\Delta=(24m)^2-4\times36(3m^2-1)>0,\\y_1+y_2=-\frac{24m}{3m^2-1},\\y_1y_2=\frac{36}{3m^2-1},\end{cases}$ …………………………………………………… 7 分

因为使得点 F 到直线 PA,PB 的距离相等,所以 PF 是$\angle APB$ 的角平分线,

则 $k_{PA}+k_{PB}=0$, …………………………………………………………………… 9 分

即$\frac{y_1}{x_1-n}+\frac{y_2}{x_2-n}=0$,$y_1(my_2+4-n)+y_2(my_1+4-n)=0$,

$2my_1y_2+(4-n)(y_1+y_2)=0$，$2m\cdot\dfrac{36}{3m^2-1}-\dfrac{(4-n)\times 24m}{3m^2-1}=0$，

即 $3m-m(4-n)=0$，因为 $m\neq 0$，所以 $n=1$， …………………………………… 11 分

故存在 $P(1,0)$． …………………………………… 12 分

22．解：(1)因为 $f(x)=e^{2x}-3x$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-3$，则 $k=f'(0)=-1$． …………………… 1 分

因为 $f(0)=1$，所以切点坐标为 $(0,1)$， …………………………………… 2 分

所以函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=-x$，即 $y=-x+1$， …………………… 3 分

所以切线与坐标轴的交点坐标分别为 $(0,1)$，$(1,0)$， …………………………………… 4 分

所以所求三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$． …………………………………… 5 分

(2)方法一．

由 $\dfrac{f(x)}{e^x}>-a$ 可得 $a>\dfrac{3x}{e^{2x}+e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立． …………………………………… 6 分

令 $g(x)=\dfrac{3x}{e^{2x}+e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{3(e^{2x}+e^x)-3(2e^{2x}+e^x)x}{(e^{2x}+e^x)^2}=\dfrac{3e^x(e^x+1-2xe^x-x)}{(e^{2x}+e^x)^2}$， …………………… 7 分

令 $h(x)=e^x+1-2xe^x-x$，则 $h'(x)=e^x-2e^x-2xe^x-1=-2xe^x-e^x-1<0$，

因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数． …………………………………… 9 分

而 $h(0)=2>0$，$h(1)=-e<0$，可知在区间 $(0,1)$ 上必存在 x_0，使得 $h(x)$ 满足 $h(x_0)=0$，

且 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减． …………………………………… 10 分

由于 $g(x)\leqslant g(x_0)=\dfrac{3x_0}{e^{2x_0}+e^{x_0}}$，而 $x_0=\dfrac{e^{x_0}+1}{2e^{x_0}+1}$，故 $g(x)\leqslant g(x_0)=\dfrac{3x_0}{e^{2x_0}+e^{x_0}}=\dfrac{3}{e^{x_0}(2e^{x_0}+1)}$．

由 $x_0\in(0,1)$，可知 $e^{x_0}(2e^{x_0}+1)\in(3,2e^2+e)$，$g(x_0)\in(\dfrac{3}{2e^2+e},1)$，

所以 $a\geqslant 1$，因此 a 的最小正整数值为 1． …………………………………… 12 分

方法二．

由 $\dfrac{f(x)}{e^x}>-a$ 可得 $a(e^{2x}+e^x)-3x>0$，当 $x=1$ 时，$\dfrac{ae-3}{e}>-a$，则 $a>\dfrac{3}{2e}$，即 $a\geqslant 1$． …………………… 7 分

当 $a=1$ 时，令 $g(x)=e^{2x}+e^x-3x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=2e^{2x}+e^x-3=(2e^x+3)(e^x-1)>0$， …… 9 分

则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=2$，所以 $e^{2x}+e^x-3x>0$ 成立． …………………… 11 分

因此 a 的最小正整数值为 1． …………………………………… 12 分

9
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。