赣州市 2023 年高三适应性考试文科数学

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	C	C	B	B	D	A	B	D	A	D

二、填空题

13．$\dfrac{\pi}{3}$；　14．$(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$；　15．$\dfrac{1}{4}$；　16．$-\dfrac{4048}{4047}$．

三、解答题

17. 解：（1）根据 $4\sin A\sin B\cos C=\sin^2 A+\sin^2 B$ 及正弦定理得 $4ab\cos C=a^2+b^2$，……2 分

由余弦定理得 $4ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a^2+b^2$ ……4 分

所以 $2(a^2+b^2-c^2)=a^2+b^2$，化简得 $a^2+b^2=2c^2$，

再由正弦定理，得 $\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$ ……6 分

（2）由 $\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$ 及 $C=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\sin^2 A+\sin^2 B=\dfrac{3}{2}$ ……7 分

$\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}=\dfrac{3}{2}$，$\cos 2A+\cos 2B=-1$ ……8 分

根据 $A+B+C=\pi$ 及 $C=\dfrac{\pi}{3}$，得 $B=\dfrac{2}{3}\pi-A$ ……9 分

于是 $\cos 2A+\cos 2(\dfrac{2}{3}\pi-A)=-1$ ……10 分

$\cos 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A=-1$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A=1$，

$\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})=1$ ……11 分

因为 $2A-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，则 $2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$ ……12 分

17. 解：（1）由题意，从 5 个数据任选 2 个共有 10 种：（23，25），（23，30），（23，26），（23，16），（25，30），（25，26），（25，16），（30，26），（30，16），（26，16）……3 分

设“两个数据均不大于 26”为事件 A，则事件 A 包含 6 个基本事件……4 分

所以 P（A）$=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，　故事件 A 的概率为 $\dfrac{3}{5}$ ……5 分

（2）由数据得：$\bar{x}=\dfrac{10+11+13+12+9}{5}=11$，$\bar{y}=\dfrac{23+25+30+26+16}{5}=24$ ……6 分

$5\overline{x}\overline{y}=1320$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=10\times23+11\times25+13\times30+12\times26+9\times16=1351$…………7分

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10^2+11^2+13^2+12^2+9^2=615$……………………………………………………8分

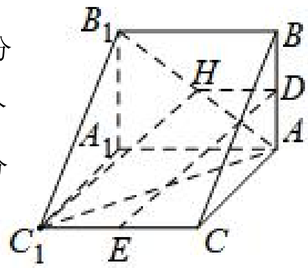
$b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{1351-1320}{615-5\times121}=\dfrac{31}{10}=3.1$……………………………10分

$a=24-3.1\times11=-10.1$……………………………………………………………………11分

所以y关于x的线性回归方程为$y=3.1x-10.1$……………………………………………12分

19.（1）证明：取AB_1的中点H，连结C_1H、DH…………………………………………1分

因为在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D为AB的中点，



所以H为矩形ABB_1A_1的中心……………………………………………2分

又因为E为侧棱CC_1的中点，所以$HD//C_1E,HD=C_1E$……………3分

所以四边形DHC_1E为平行四边形……………………………………………4分

所以$DE//HC_1$，又因为$DE\not\subset$平面$AB_1C_1,HC_1\subset$平面AB_1C_1，

所以$DE//$平面AB_1C_1 ……………………………………………………6分

（方法二）证明：证明：取AC的中点G，连结DG,EG……………………………………1分

因为直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，D为AB的中点，E为CC_1的中点，

所以$DG//BC//B_1C_1,EG//AC_1$……………………………………………………………3分

因为$DG\cap EG=G,B_1C_1\cap AC_1=C_1$，所以平面$DEG//$平面$AB_1C_1$……………………4分

又因为$DE\subset$平面DEG，所以$DE//$平面AB_1C_1……………………………………………6分

（2）因为$C_1B_1=C_1A=4\sqrt{2}$，H为AB_1的中点，所以C_1H平分$\angle AC_1B_1$……………7分

因为$DE//HC_1$，所以异面直线DE与B_1C_1所成的角为$\angle HC_1B_1=30^\circ$…………………8分

所以ΔAB_1C_1为等边三角形，所以$AB_1=4\sqrt{2}$………………………………………………9分

又因为$\angle BAC=90^\circ$，且$AA_1\perp$面$A_1B_1C_1$，所以$A_1B_1=A_1C_1=A_1A=4$……………10分

所以$V_{D-AB_1C_1}=V_{E-AB_1C_1}=V_{B_1-EAC_1}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta EAC_1}\cdot|A_1B_1|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot4=\dfrac{16}{3}$……………12分

20. 解：（1）由$f(x)=x^2-3x+\ln x\ (x>0)$，

得$f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}\ (x>0)$……………………………………………1分

令$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{2}$或$x=1$……………………………………………………………2分

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right), x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减……3 分

则当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 有极大值 $f(x)_{极大值}=f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}-\ln 2$……4 分

当 $x=1$ 时 $f(x)$ 有极小值 $f(x)_{极小值}=f(1)=-2$……5 分

（2）当 $x_1<x_2$ 时且 $x_1,x_2\in[1,2]$，由 $x_1x_2\left(f(x_1)-f(x_2)\right)-m(x_1-x_2)>0$

得 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{m(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{m}{x_2}-\frac{m}{x_1}$……6 分

则 $f(x_1)+\frac{m}{x_1}>f(x_2)+\frac{m}{x_2}$……7 分

令 $g(x)=f(x)+\frac{m}{x}$，$x\in[1,2]$，则 $g(x_1)>g(x_2)$……8 分

即当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)=f(x)+\frac{m}{x}$ 单调递减……9 分

$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}\leqslant 0$ 对于 $x\in[1,2]$ 恒成立，**公众号：网课来了**

则 $m\geqslant 2x^3-3x^2+x$ 对于 $x\in[1,2]$ 恒成立……10 分

令 $\varphi(x)=2x^3-3x^2+x$，$\varphi'(x)=6x^2-6x+1=6(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$，

当 $x\in[1,2]$ 时 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，$\varphi(x)_{\max}=\varphi(2)=6$，

则 $m\geqslant 6$……12 分

21. 解：（1）$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$……3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……4 分

（2）方法一：①当直线 l 的斜率不存在时，因为直线 l 过点 $P(1,2)$，则 $A\left(1,\frac{3}{2}\right), B\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，

由 $|AP|\cdot|MB|=|AM|\cdot|PB|$ 得 $M\left(1,\frac{9}{8}\right)$……5 分

②当直线 l 的斜率存在时，且令为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)+2$，

令 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$

由$\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得$(4k^2+3)x^2-8k(k-2)x+4(k-2)^2-12=0$……………………7 分

由$\Delta>0$得$3k^2+4k-1>0$，则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2-16k}{4k^2+3}, x_1x_2=\dfrac{4k^2-16k+4}{4k^2+3}$……………8 分

由$|AP|\cdot|MB|=|AM|\cdot|PB|$得$\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AM|}{|MB|}$…………………………………………………9 分

由已知得点P在椭圆外且点A,M,B在点P同侧，

则$\dfrac{1-x_1}{1-x_2}=\dfrac{x_1-x_0}{x_0-x_2}$整理得 $x_0=\dfrac{(x_1+x_2)-2x_1x_2}{2-(x_1+x_2)}=\dfrac{8k-4}{8k+3}$…………………………10 分

将x_0代入直线$y=k(x-1)+2$得 $y_0=\dfrac{9k+6}{8k+3}$

$\begin{cases} x_0=\dfrac{8k-4}{8k+3} \\ y_0=\dfrac{9k+6}{8k+3} \end{cases}$ 消去参数k得$3x_0+8y_0-12=0$，$M\left(1,\dfrac{9}{8}\right)$也满足该方程………………11 分

综上：点M总在定直线$3x+8y-12=0$上…………………………………………………12 分

方法二：

令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$

由$|AP|\cdot|MB|=|AM|\cdot|PB|$，记$\lambda=\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AM|}{|MB|}$，则$\lambda>0$且$\lambda\neq1$……………………5 分

又点P在椭圆外，P,A,M,B四点共线，所以$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$…………6 分

所以$(1-x_1,2-y_1)=-\lambda(x_2-1,y_2-2)$，$(x-x_1,y-y_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y)$，

所以$\begin{cases} 1-x_1=\lambda(1-x_2) \\ 2-y_1=\lambda(2-y_2) \end{cases}$，$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y) \end{cases}$……………………………………7 分

所以$\begin{cases} 1=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda} \\ 2=\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda} \end{cases}$，$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$………………………………………8 分

又$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1 \end{cases}$ 得$\dfrac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{4}+\dfrac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{3}=1-\lambda^2$………………………………9 分

则$\dfrac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{4(1+\lambda)(1-\lambda)}+\dfrac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{3(1+\lambda)(1-\lambda)}=1$…………………………………10 分

则 $\frac{x\cdot 1}{4}+\frac{y\cdot 2}{3}=1$ ………………………………………………………………11 分

即 $3x+8y-12=0$　则点 M 总在定直线 $3x+8y-12=0$ 上……………………………12 分

22．解：（1）C 的普通方程为 $x^2+y^2-2y=0(y\geqslant 1)$ ……………………………………2 分

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 得，C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$（或

$\rho=2\sin\theta(\rho\geqslant\sqrt{2})$）(注：未标注范围扣 1 分……………………………………………5 分

（2）设 $M(\rho,\theta)$，则 $P(\rho',\theta)$，且 $\rho'=2\sin\theta(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$ ……………………………6 分

由 $|OP|\cdot|OM|=4$ 得 $\rho\cdot\rho'=4$，所以 $\rho\sin\theta=2(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$ ……………………………8 分

即 $y=2(-2\leqslant x\leqslant 2)$ ………………………………………………………………………9 分

故点 M 的轨迹的直角方程为 $y=2(-2\leqslant x\leqslant 2)$．(注：未标注范围扣 1 分）…………10 分

23. 解：（1）由 $f(x)=|x-1|+2|x+5|=\begin{cases}-3x-9, x\leqslant -5\\ x+11, -5<x\leqslant 1\\ 3x+9, x>1\end{cases}$ ……………………………3 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-5)$ 递减，在 $(-5,+\infty)$ 递增……………………………………………4 分

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-5)=6$ ………………………………………………………………5 分

（2）若 $(a+b)(a-b)\geqslant 0$，则 $|a+b|+|a-b|=|(a+b)+(a-b)|=2|a|<6$ ………………7 分

若 $(a+b)(a-b)<0$，则 $|a+b|+|a-b|=|(a+b)-(a-b)|=2|b|<6$ ……………………9 分

因此，$|a+b|+|a-b|<6$，而 $f(x)\geqslant 6$，

故 $|a+b|+|a-b|<f(x)$ ………………………………………………………………………10 分