

绝密★启用前

山东省 2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

数学

准考证号

姓名

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知  $z = \frac{3}{2 - \sqrt{5}i}$ , 则  $|z| =$   
A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{5}$
- 已知集合  $A = \{x | x^2 - 6x + 8 < 0\}$ ,  $B = \{x | a \leq x \leq a + 1\}$ , 若  $A \cup B = A$ , 则实数  $a$  的取值范围为  
A. (1, 3)                      B. [1, 3]                      C. (2, 3)                      D. [2, 3]
- 已知  $\cos \alpha \neq 0$ , 且  $4 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha = 3$ , 则  $\tan \alpha =$   
A.  $\frac{3}{5}$                       B.  $\pm \frac{3}{5}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $\pm \frac{3}{4}$
- 如图是我国古代米斗,它是称量粮食的量器,是古代官仓、粮栈、米行等必备的用具。它是随着粮食生产而发展出来的用具,早在先秦时期就有,到秦代统一了度量衡,汉代又进一步制度化,十升为斗,十斗为石的标准最终确定下来。若将某个米斗近似看作一个四棱台,上、下两个底面都是正方形,侧棱均相等,上底面边长为 25 cm,下底面边长为 15 cm,侧棱长为 10 cm,则该米斗的容积约为  
附:  $V_{\text{四棱台}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h$ .  
A. 2 400  $\text{cm}^3$                       B. 2 600  $\text{cm}^3$                       C. 2 900  $\text{cm}^3$                       D. 3 100  $\text{cm}^3$
- 已知向量  $a = (\lambda, 1)$ ,  $a - b = (0, 4)$ ,  $a \perp b$ , 则  $a - b$  在  $a$  方向上的投影为  
A.  $\sqrt{2}$                       B. 2                      C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{5}$
- 如图是我国广州的新电视塔,外观优美,结构稳定,是当地重要的地标之一。该电视塔的外形是单叶双曲面,在几何学中,单叶双曲面(有时称为旋转双曲面或圆形双曲面)是通过围绕其主轴旋转双曲线而产生的表面,在空间直角坐标系中,曲面的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$ , 则平面  $z = 1$  与单叶双曲面的截线一定是(注:  $z = 1$  表示点  $(x, y, 1)$  组成的平面,即过点  $(0, 0, 1)$  且与  $z$  轴垂直的平面)  
A. 圆                      B. 椭圆  
C. 圆或抛物线                      D. 圆或椭圆
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 公差为  $\frac{1}{3}$ ,  $a_n > 0$ ,  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ , 当  $\frac{S_n + 10}{n}$  取最小值时,  $n$  的值为  
A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 10



8. 已知  $0 < a < b$  且满足  $e^{b-a} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ , 则下列说法正确的是

A.  $\sqrt{\frac{a}{b}} < a - b + 1$

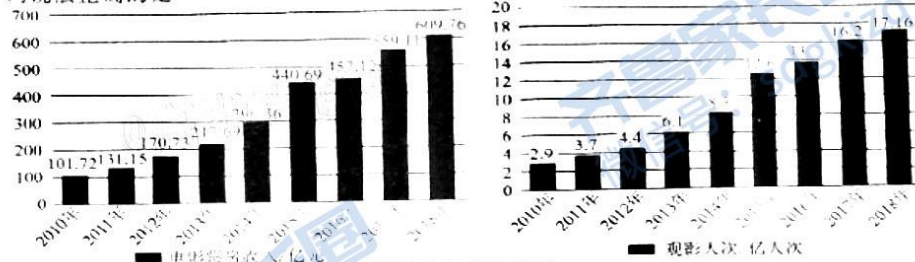
B.  $\ln a + 2a = \ln b + 2b$

C.  $a > \frac{1}{2}$

D. 不存在  $a, b$  满足  $a + b = 1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 随着人民生活水平的提高以及高新电影制作技术的研发, 人们利用周末和假期去电影院感受电影的魅力. 我国 2010 年至 2018 年年底电影年度票房总收入与观影总人数统计如图所示, 则下列说法正确的是



- A. 这九年中, 票价的增长导致年度总票房收入逐年攀升
- B. 这九年中, 票房收入与观影人数两个变量之间是正相关
- C. 这九年中, 观影人数的增长率是逐年上升的
- D. 这九年中, 年度总票房收入增速最快的是 2015 年

10. 已知实数  $a, b, c$  满足  $a > b > c$  且  $abc < 0$ , 则下列不等关系一定正确的是

A.  $ac > bc$

B.  $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

C.  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$

D.  $a \ln |c| > b \ln |c|$

11. 将函数  $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图像向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图像, 且  $g(x)$  的图像关于直线  $x = \frac{7\pi}{12}$  对称, 则下列结论正确的是

A.  $\varphi = \frac{\pi}{6}$

B.  $g(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 函数  $h(x) = f(x) + g(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递减

D. 方程  $f(x) = g(x)$  在区间  $[0, 100\pi]$  上有 201 个根

12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 左顶点为  $A$ , 点  $P$  在  $C$  的右支上, 若点  $Q$  满足  $\vec{PQ} = \frac{2}{3}(\vec{PF}_1 + \vec{PF}_2)$ ,  $O$  为坐标原点, 且  $\triangle OAQ$  为等边三角形, 则下列说法正确的是

A.  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{2\sqrt{15}}{5}x$

B.  $C$  的离心率为  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

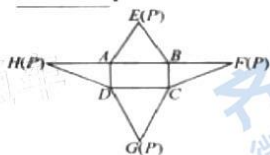
C. 若点  $Q(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ , 则  $\triangle PF_1F_2$  的面积为  $\frac{12\sqrt{30}}{5}$

D.  $C$  上存在点  $P$ , 使得  $PF_2 \perp F_1F_2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $f(x)$  满足 ① 定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ; ② 值域为  $\mathbf{R}$ ; ③  $f(-x) = f(x)$ . 写出一个满足上述条件的函数  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知椭圆  $C$  的中心在坐标原点, 右焦点  $F$  为直线  $x-2y-2=0$  与  $x$  轴的交点, 且在经过点  $F$  的所有弦中, 最短弦的长度为  $\frac{10}{3}$ , 则  $C$  的方程为 \_\_\_\_\_.
15. 石家庄市疫情期间, 全国各地援石医疗队不顾危险, 不畏艰辛, 穿梭在城市、乡村的大街小巷, 争分夺秒救助患者, 充分体现了对党和人民高度负责的使命担当, 展现了顽强拼搏的斗志、甘于奉献的精神. 抗疫任务完成后, 石家庄交警列队礼送、铁骑引领、警车护航、敬礼致敬, 以“最高礼遇、最深敬意、最佳形象”送行支援队伍. 7 辆医护人员所乘车辆排成一列, 若排在最前面的必须是甲车或乙车, 丙车不在最后面, 则该 7 辆车不同的排列方法共有 \_\_\_\_\_ 种.
16. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  的展开图中, 四边形  $ABCD$  是矩形,  $\triangle ABE$  是等边三角形,  $AD \perp AH$ ,  $AD=1$ ,  $GD=GC$ , 若四棱锥  $P-ABCD$  的外接球表面积为  $\frac{19\pi}{3}$ , 则四棱锥  $P-ABCD$  的外接球半径为 \_\_\_\_\_,  $\sin \angle GCF =$  \_\_\_\_\_.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在①  $4S=3bc \cos C$ , ②  $b^2+c^2=4-\sqrt{2}bc$ , ③  $b \sin A = \frac{2}{3}$  这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 若  $\cos B = \frac{c}{2b}$ ,  $a=2$ , \_\_\_\_\_, 求  $b$  的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_n > 0$ ,  $4S_1 + S_2 = S_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的公比  $q$ ;

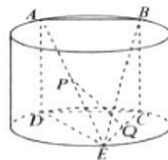
(2) 对于  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 不等式  $\frac{a_n - a_1}{S_n} + n^2 + \frac{17}{2} \geq 6n + t$  恒成立, 求实数  $t$  的最大值.

19. (12 分)

如图, 圆柱的高为 3,  $\triangle CDE$  是圆柱的下底面圆的内接三角形,  $AB$  是上底面圆内的一条弦,  $AD, BC$  均为圆柱的母线, 且  $CD=2$ ,  $P, Q$  分别为  $AE, CE$  的中点.

(1) 求证:  $PQ \parallel$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若  $\triangle CDE$  是等边三角形, 求直线  $PQ$  与平面  $ABE$  所成角的正弦值.



20. (12分)

已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ .

(1) 若  $C$  与圆  $G: (x-4)^2 + y^2 = 13$  在第一象限内交于  $M, N$  两点, 求直线  $MN$  的方程;

(2) 直线  $l$  过点  $D(-1, 0)$  交  $C$  于  $A, B$  两点, 点  $B$  关于  $x$  轴的对称点为  $E$ , 直线  $AE$  交  $x$  轴于点  $P$ , 求证:  $P$  为定点.

21. (12分)

国际比赛赛制常见的有两种, 一种是单败制, 一种是双败制. 单败制即每场比赛的失败者直接淘汰, 常见的有  $BO1, BO3$  等等.  $BO1$  表示双方进行一局比赛, 获胜者晋级.  $BO3$  表示双方最多进行三局比赛, 若连胜两局, 则直接晋级; 若前两局两人各胜一局, 则需要进行第三局决胜负. 现在  $A, B, C, D$  四人进行乒乓球比赛, 比赛赛制采用单败制,  $A$  与  $B$  一组,  $C$  与  $D$  一组, 第一轮两组分别进行  $BO1$ , 胜者晋级, 败者淘汰; 第二轮由上轮的胜者进行  $BO3$ , 胜者为冠军. 已知  $A$  与  $B, C, D$  比赛,  $A$  的胜率分别为  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ ;  $B$  与  $C, D$  比赛,  $B$  的胜率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ ;  $C$  与  $D$  比赛,  $C$  的胜率为  $\frac{2}{3}$ . 任意两局比赛之间均相互独立.

(1) 在  $C$  进入第二轮的前提下, 求  $A$  最终获得冠军的概率;

(2) 记  $A$  参加比赛获胜的局数为  $X$ , 求  $X$  的分布列与数学期望.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = ae^x - a^2x$ .

(1) 若  $a > 0$ , 且曲线  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处的切线斜率为  $-2$ , 求函数  $f(x)$  的最小值;

(2) 若  $a < 0$ , 且当  $x \in [0, +\infty)$  时, 不等式  $\frac{f(x)}{a} + ax + ax^2 \geq x + 1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索