

天一大联考

2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(四)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

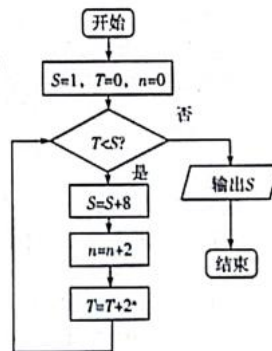
1. 已知集合 $M = \{y | y = 1 - x^2\}$, $N = \{x | |2x - 1| \geq 1 - 2x\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, 1]$ D. $(-\infty, 1]$
2. 若复数 $z = \frac{1-2i}{2+i} + a (a \in \mathbf{R})$ 在复平面内对应的点在第三象限,且 $|z| = \sqrt{5}$, 则 $a =$
 A. 2 B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. -2
3. 已知非零向量 a, b 满足 $|b| = 4|a|$ 且 $a \perp (2a - b)$, 则 a 与 b 的夹角为
 A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
4. 已知 $a = 6^{-\frac{1}{3}}$, $b = 10^{-\frac{1}{3}}$, $c = 5^{-\ln \frac{1}{3}}$, 则 a, b, c 的大小关系是
 A. $a > b > c$ B. $c > b > a$
 C. $c > a > b$ D. $b > a > c$
5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 则 $f(x)$ 是
 A. 偶函数, 值域为 $(0, \frac{1}{2})$ B. 非奇非偶函数, 值域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 C. 奇函数, 值域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. 奇函数, 值域为 $(0, \frac{1}{2})$
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_1 + a_3 = \frac{5}{4}$. 若 $S_n = \frac{11}{16}$, 则 n 的值为
 A. 4 B. 5 C. 6 D. 不存在
7. 若函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图象过点 $M(\frac{2\pi}{3}, -3)$, 直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后恰好经过 $f(x)$ 上与点 M 最近的零点, 则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间是
 A. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ B. $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ C. $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ D. $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

理科数学试题 第 1 页(共 4 页)

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 直线 l 过 F 点与一条渐近线垂直, 原点到 l 的距离等于虚轴的长, 则双曲线的离心率为
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{5}{4}$
9. 拉格朗日中值定理又称拉氏定理, 是微积分学中的基本定理之一, 它反映了函数在闭区间上的整体平均变化率与区间某点的局部变化率的关系. 其具体内容如下: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足以下条件: ①在 $[a, b]$ 上图象连续, ②在 (a, b) 内导数存在, 则在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ($f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数). 则函数 $f(x) = xe^{x-1}$ 在 $[0, 1]$ 上这样的 c 点的个数为
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
10. 6 名大学生响应国家号召, 到西部边远地区 A, B, C 三个学校支教, 每个学校 2 人, 根据学校需要及所学的专业, 甲不能到 A 学校, 乙、丙所学专业相同, 不能安排到同一学校, 则不同的安排方案有
- A. 24 种 B. 36 种 C. 48 种 D. 72 种
11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , M, N 为抛物线上的两点 (与坐标原点不重合), $MA \perp l$ 于 $A, NB \perp l$ 于 B , 已知 MN 的中点 D 的坐标为 $(2, 1)$, $\triangle ABF$ 与 $\triangle MNF$ 的面积比为 $2:1$, 则 p 的值为
- A. 4 B. 3 C. 1 D. 1 或 $\frac{1}{2}$
12. 已知圆锥的底面圆心为 O , 顶点为 S , 侧面展开图对应扇形的圆心角为 $\sqrt{3}\pi$, A, B 是底面圆周上的两点, SB 与平面 SOA 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$, 则 SA 与 OB 所成角的余弦值为
- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 如图所示的圆盘的三条直径把圆分成六部分, 往圆盘内任投一飞镖 (大小忽略不计), 则飞镖落到阴影部分内的概率为 _____.



14. 执行如图所示的程序框图, 输出的 $S =$ _____.
15. 在平面四边形 $PACB$ 中, 已知 $\angle APB = 120^\circ, PA = PB = 2\sqrt{3}, AC = 10, BC = 8$. 沿对角线 AB 折起得到四面体 $P-ABC$, 当 PA 与平面 ABC 所成的角最大时, 该四面体的外接球的半径为 _____.
16. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 a_1, a_2, a_3 成等比数列, $S_3 = a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2(1+a_n)}{a_n a_{n+1}}$, 前 n 项和为 T_n , 则 $T_3 + T_{10} =$ _____.



微

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

斜三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\cos B - 2\cos A = -2\sin B \sin C$.

(I) 求角 C ;

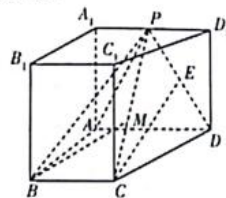
(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$, 周长为 15, 求 $\frac{\sin A}{\sin B}$ 的值.

18. (12 分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是棱 A_1D_1 的中点, E 是 PD 的中点, $AA_1 = \sqrt{3}$, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$.

(I) 证明: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 若点 M 在线段 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求线段 BM 的长度.



19. (12 分)

国家对电器行业生产要求低碳、环保、节能, 有利于回收. 冰箱的生产质量用综合质量指标值 H 来衡量, 当 $H \geq 85$ 时, 产品为一级品, 当 $75 \leq H < 85$ 时, 产品为二级品, 当 $70 \leq H < 75$ 时, 产品为三级品. 某冰箱生产厂家, 为满足国家要求, 根据市场需求, 研究开发一种新款冰箱, 试生产 50 台, 并初步测量了每台冰箱的 H 值, 得到下面的结果:

综合质量指标值 H	$[70, 75)$	$[75, 80)$	$[80, 85)$	$[85, 90)$	$[90, 95)$
频数	5	8	12	10	15

将样本频率视为总体概率.

(I) 若从这批产品中有放回地随机抽取 3 件, 记“抽出的产品中恰有一件三级品”为事件 W , 求事件 W 发生的概率 $P(W)$.

(II) 将这批产品报送主管部门进行质量检测, 以取得产品生产许可证. 主管部门的检测方案: 先从这批产品中任取 4 件, 若这 4 件产品都是一级品, 再从这批产品中任取 1 件检测, 若为一级品, 则这批产品通过检测, 并颁发生产许可证; 若这 4 件产品有 3 件一级品, 则再从这批产品中任取 4 件检测, 若这 4 件产品都是一级品, 则这批产品通过检测, 并颁发生产许可证. 其他情况下这批产品不能通过检测, 且每件产品的检测相互独立. 求该冰箱生产厂家取得生产许可证的概率.

(III) 若该冰箱生产厂家取得生产许可证, 厂家投入生产, 且已知生产一台冰箱的成本为 600 元, 一件一级品的售价为 1 600 元, 一件二级品的售价为 1 400 元, 一件三级品的售价为 200 元, 设一台冰箱的利润为 Y 元, 求 Y 的分布列及数学期望.



微

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆的右焦点与右顶点及上顶点构成的三角形面积为 $\sqrt{2} - 1$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程.

(II) 已知直线 $y = k(x - 1)$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若点 Q 的坐标为 $(\frac{7}{4}, 0)$, 问: 是否存在 k , 使得 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} > 1$? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^{x-1} - ax + 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点的个数;

(II) 当 $a = 0$ 时, 证明: 不等式 $x \ln x - \frac{f(x) - 2}{f(x)} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \sin(\frac{\pi}{2} + \sigma), \\ y = 4 - t \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ (其中 t 为参数, σ 为常数), 以坐标原点 O

为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$, 射线 l_0 的极坐标方程为 $\theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$, 射线 l_0 与曲线 C 交于 O, M 两点.

(I) 写出当 $\sigma = \pi$ 时 l 的极坐标方程以及曲线 C 的参数方程;

(II) 在 (I) 的条件下, 若射线 l_0 与直线 l 交于点 N , 求 $\frac{|OM|}{|ON|}$ 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x + 3| + |x + \frac{1}{2}|$.

(I) 求不等式 $f(x) \leq 4x + 7$ 的最小整数解 m ;

(II) 在 (I) 的条件下, 对任意 $a, b \in (-m, +\infty)$, 若 $a + b = 4$, 求 $W = \frac{b^2}{a-1} + \frac{a^2}{b-1}$ 的最小值.



微

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜

自主选拔在线

