

2021 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

（考试时间：2021 年 5 月 23 日 14:30~16:30）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分。

1. 过抛物线 $y = x^2$ 上两点 $A(1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 分别作抛物线的切线 l_1, l_2 , l_1 与 l_2 交于点 C . 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 则 $x_2 =$ _____.

2. 已知在凸五边形 $ABCDE$ 中, $DE \parallel AC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AC = 12$, $CD = 6$, AC 平分 $\angle DAB$, $\angle BCE = 60^\circ$. 则 $\triangle BCE$ 面积的最小值为_____.

3. 已知在三棱锥 $D-ABC$ 中, $\angle ACB = \angle ABD = 90^\circ$, $CA = CB$, $\angle BAD = 30^\circ$. 若点 C 在平面 ABD 上的射影恰好在 AD 上, 则二面角 $C-AB-D$ 的平面角的正弦值大小为_____.

4. 设 x, y, z 为正实数, $M = \max\{xy + \frac{2}{z}, z + \frac{2}{y}, y + z + \frac{1}{x}\}$. 则 M 的最小值为_____.

5. 设函数 $f(x) = x - \ln(ax + 2a + 1) + 2$. 若对于任意 $x \geq -2$, 均有 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

6. $\sum_{k=0}^{2022} C_{2022}^k \cos \frac{(1011-k)\pi}{2}$ 的值为_____.

7. 设集合 $T = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{N}^*, \text{且 } a, b, c \text{ 可构成某个三角形的三边长}\}$.

则 $\sum_{(a,b,c) \in T} \frac{2^a}{3^b \cdot 5^c}$ 的值为_____.

8. 在一个 3×3 的方格表中, 若 9 个小方格中的每一个均被染成红、黄、蓝、紫四种颜色之一, 任意两个有公共边的小方格的染色均不相同, 且该方格表中恰有 2 个小方格染蓝色, 则符合条件的染色方法种数为_____.(用具体数字作答)

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9. (本题满分 16 分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两顶点为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$. 点 P (不同于 A, B) 在椭圆 Γ 上, 点 D 的坐标为 $(-4, 0)$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{5} \overrightarrow{DP}$, 直线 AP 与 BE 交于点 Q . 求点 Q 的轨迹方程.

10. (本题满分 20 分) 给定正整数 a, b , 其中 $a < b$. 数列 $\{F_n\}$ 满足: $F_1 = a, F_2 = b$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 若不存在无穷多个正整数 k , 使得 $1 + mF_k F_{k+2}$ 为完全平方数, 则称 m 具有性质 P . 求证: 存在无穷多个正整数 m 具有性质 P .

11. (本题满分 20 分) 求最大的正整数 n , 使得对满足 $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ 的任意正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 均有 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i$ 恒成立, 其中 $a_{n+1} = a_1$.

2021 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、本试卷满分 120，其中填空题 64 分，解答题 56 分。

2、评阅试卷时，请依据评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；第 9 题 4 分一个档次，第 10 题和第 11 题均为 5 分一个档次. 请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

3、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1、 $-\frac{1}{4}$ 2、27 3、 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 4、3 5、 $[0,1]$ 6、 2^{1011} 7、 $\frac{17}{21}$ 8、3816.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两顶点为 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$. 点 P (不同于 A, B) 在椭圆 Γ 上，点 D 的坐标为 $(-4, 0)$ ， $\overline{DE} = \frac{3}{5}\overline{DP}$ ，直线 AP 与 BE 交于点 Q . 求点 Q 的轨迹方程.

解法一：易求得椭圆 Γ 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

设 $P(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ ，由 $\overline{DE} = \frac{3}{5}\overline{DP}$ 得

$$(x_E + 4, y_E) = \frac{3}{5}(2\cos\theta + 4, \sqrt{3}\sin\theta),$$

所以，点 E 的坐标是 $(\frac{6\cos\theta - 8}{5}, \frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{5})$8 分

所以直线 AP 的方程是 $y = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta + 2}(x + 2)$,

直线 BE 的方程是 $y = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta - 6}(x - 2)$,

联立 AP, BE 的方程，解得交点 Q 的坐标为 $(\cos\theta - 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$12 分

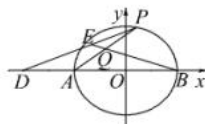
所以，点 Q 的轨迹方程为 $(x+1)^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1 (y \neq 0)$16 分

解法二：易求得椭圆 Γ 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

因为直线 BQE 截 $\triangle ADP$ ，由梅涅劳斯定理，得 $\frac{AB}{BD} \cdot \frac{DE}{EP} \cdot \frac{PQ}{QA} = 1$.

因为 $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$, $\frac{DE}{EP} = \frac{3}{2}$,

所以 Q 是 PA 的中点.8 分



设 $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$,

$$\text{则 } x = \frac{x_0 - 2}{2}, \quad y = \frac{y_0}{2}.$$

解得 $x_0 = 2x + 2$, $y_0 = 2y$12 分

由 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 Γ 上, 可得 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$,

所以, 点 Q 的轨迹方程为 $(x+1)^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$ ($y \neq 0$).16 分

10. (本题满分 20 分)

给定正整数 a, b , 其中 $a < b$. 数列 $\{F_n\}$ 满足: $F_1 = a, F_2 = b, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

若不存在无穷多个正整数 k , 使得 $1 + mF_k F_{k+2}$ 为完全平方数, 则称 m 具有性质 P .

求证: 存在无穷多个正整数 m 具有性质 P .

证明: 先证两个引理:

引理 1: 设 $T = a^2 + ab - b^2$, 则对任意的正整数 n , 都有 $F_n F_{n+2} + (-1)^n T = F_{n+1}^2$.

引理 1 的证明: 下面用数学归纳法证明.

由条件知 $F_3 = a + b$, 从而 $F_1 F_3 + (-1)^1 T = a(a + b) - (a^2 + ab - b^2) = b^2 = F_2^2$,

故结论对 $n = 1$ 成立.

结论成立;

假设 $n = k (k \geq 1)$ 时, 结论成立, 即 $F_k F_{k+2} + (-1)^k T = F_{k+1}^2$,

当 $n = k + 1$ 时,

$$F_{k+1} F_{k+3} + (-1)^{k+1} T = F_{k+1} (F_{k+1} + F_{k+2}) + F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = F_{k+1} F_{k+2} + F_k F_{k+2} = F_{k+2}^2$$

故当 $n = k + 1$ 时, 结论也成立.

由归纳原理知, 对任意的正整数 n , 都有 $F_n F_{n+2} + (-1)^n T = F_{n+1}^2$5 分

引理 2: 对任意给定的整数 D , 关于 x, y 的方程 $x^2 - y^2 = D$ 至多有有限多组整数解 (x, y) .

引理 2 的证明: 由 $x^2 - y^2 = D$ 知 $(x + y)(x - y) = D$,

$$\text{从而} \begin{cases} x+y=d \\ x-y=\frac{D}{d} \end{cases}, \text{其中 } d \text{ 为 } D \text{ 的约数.}$$

对每一个 d , 方程组至多有一组整数 (x, y) .

由于 D 是给定的整数, 从而 d 的个数是有限的,

所以, 方程 $x^2 - y^2 = D$ 至多有有限多组整数解 (x, y) .

……10 分

回到原题:

取 $m = t^2 (t \in \mathbf{N}^*, t \geq 2)$, 记 $S_k = 1 + mF_k F_{k+2}$,

由引理 1 知, $S_k = 1 + m(F_{k+1}^2 - (-1)^k T) = (tF_{k+1})^2 + 1 + (-1)^{k+1} t^2 T$,

若 S_k 为完全平方数, 记 $S_k = x^2, tF_{k+1} = y^2, D = 1 + (-1)^{k+1} t^2 T$,

从而有 $x^2 - y^2 = D$, 其中 $D = 1 \pm t^2 T$ 为整数.

……15 分

由引理 2 知, 方程 $x^2 - y^2 = D$ 仅有有限多组整数解 (x, y) .

因此, 当 $m = t^2 (t \in \mathbf{N}^*, t \geq 2)$ 时, 正整数 m 都具有性质 P .

综上所述, 结论成立.

……20 分

11. (本题满分 20 分) 求最大的正整数 n , 使得对满足 $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ 的任意正实数 $a_1, a_2, \dots,$

a_n , 都有 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i$ 恒成立, 其中 $a_{n+1} = a_1$.

解: 一方面, 先证: $n \leq 4$.

事实上, 若 $n = 5$, 取 $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = 2, a_4 = 128, a_5 = 2$,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} = 2 + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + 64 + 32 = 98 + \frac{1}{32} < 99,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{2} + 64 + 64 + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} < 129,$$

$$\text{而 } \sum_{i=1}^n a_i > 130, \text{ 从而 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} - 2 \sum_{i=1}^n a_i < 99 + 129 - 130 \times 2 < 0,$$

故 $n = 5$ 不满足条件.

……5 分

参考答案及评分标准 (第 3 页, 共 4 页)

若 $n \geq 6$, 取 $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = 2, a_4 = 128, a_5 = 2, a_6 = \dots = a_n = 1$,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} = 2 + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + 64 + 2 + (n-6) + 16 = 78 + n + \frac{1}{32} < 79 + n,$$

$$\text{及 } \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{2} + 64 + 64 + \frac{1}{64} + \frac{1}{2} + (n-6) + \frac{1}{16} < 124 + n,$$

$$\text{而 } \sum_{i=1}^n a_i > 127 + n, \text{ 从而 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} - 2 \sum_{i=1}^n a_i < 79 + 124 - 127 \times 2 < 0.$$

故 $n \geq 6$ 均不满足条件.

所以, $n \leq 4$.

另一方面, 再证: $n = 4$ 满足条件.

将 a_1, a_2, a_3, a_4 分别记为 a, b, c, d , 则 $abcd = 1$, 即证 $\sum_{cyc} \frac{b}{a} + \sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq 2 \sum_{cyc} a$.

注意到由均值不等式,

$$\frac{2b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} \geq 4 \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{d} \right)^{\frac{1}{4}} = 4b,$$

$$\frac{2b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} \geq 4 \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} \right)^{\frac{1}{4}} = 4b,$$

$$\text{上两式相加得: } 3 \cdot \frac{b}{c} + 3 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{a}{d} \geq 8b. \quad (*)$$

对 (*) 轮换求和即得:

$$3 \sum_{cyc} \frac{b}{c} + 3 \sum_{cyc} \frac{b}{a} + \sum_{cyc} \frac{c}{d} + \sum_{cyc} \frac{a}{d} \geq 8 \sum_{cyc} b$$

$$\text{注意到 } \sum_{cyc} \frac{b}{c} = \sum_{cyc} \frac{a}{b}, \sum_{cyc} \frac{c}{d} = \sum_{cyc} \frac{a}{b}, \sum_{cyc} \frac{a}{d} = \sum_{cyc} \frac{b}{a}$$

$$\text{所以, } \sum_{cyc} \frac{b}{a} + \sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq 2 \sum_{cyc} b.$$

综上所述, 所求正整数 n 的最大值为 4.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zzzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》