2020年上海交大强基计划试题解析

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，若 $c\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则函数 $g(x)=f(x+c)+f(x-c)$ 的定义域为________.

解析：由题意得 $\begin{cases}0<x+c<1\\0<x-c<1\end{cases}$，即 $\begin{cases}-c<x<1-c\\c<x<1+c\end{cases}$ 解得 $c<x<1-c$，故填 $(c,1-c)$.

2.已知方程 $2^x-\sin x-1=0$，给出下列四种判断：

（1）方程没有正数解；（2）方程有无数多个解；

（3）方程有唯一正数解；（4）方程的实根小于 1.

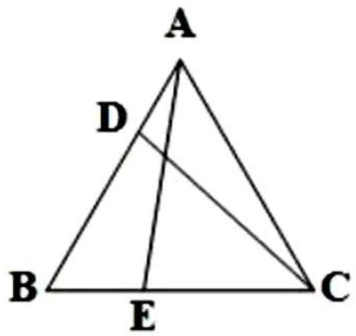
其中错误的判断序号为________.

解析：原方程变为 $2^x=\sin x+1$，考虑函数 $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=1+\sin x$ 的图像，可知方程有无数多个负数解，有一个解为 0，还有一个小于 1 的正数解，故填（1）.

3.在小于 1000 的正整数中，既不是 5 的倍数也不是 7 的倍数的整数个数为________.

解析：由容斥原理可知：$999-\left[\frac{999}{5}\right]-\left[\frac{999}{7}\right]+\left[\frac{999}{35}\right]=686$.填 686

4.已知边长为 a 的正三角形 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别在边 AB，BC 上，且 $AD=BE=\frac{1}{3}a$，连接 AE、CD，则 AE 与 CD 的夹角为________.



微信公众号：数学研讨

解析：由题意得 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$；$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，又

$$|AE|=|CD|=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-2a\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{7}}{3}a$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{7}{18}a^2$$

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\times\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{7}{18}a^2\times\frac{9}{7a^2}=\frac{1}{2}$，即 AE 与 CD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，填 $\frac{\pi}{3}$.

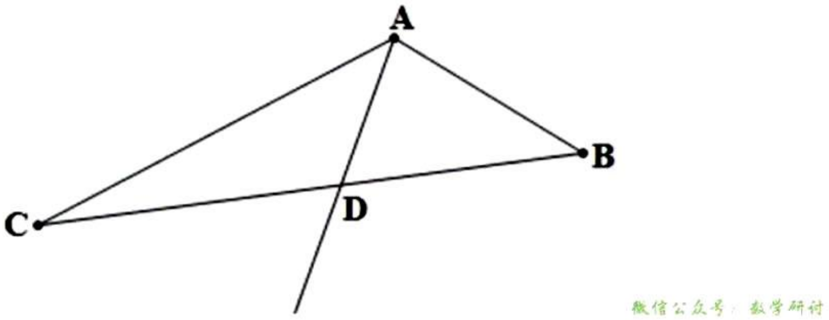
5.已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(3,4),B(6,0),C(-5,-2)$，则内角 A 的平分线所在的直线方程为________.

解析：设角 A 的平分线交 BC 于 D，则由角平分线定理得

$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{8^2+6^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$，

即 $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，可求得 D 点坐标为 $\left(\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$，所以 $k_{AD}=\frac{4+\frac{2}{3}}{3-\frac{7}{3}}=7$，

所以直线 AD 方程为 $y=7x-17$.



6.一个袋子中装有 2 个红球，3 个黑球，5 个白球，现从中任意取 6 个，不同的取法总数为________.

解析：设取出的 6 个球中红球 x 个，黑球 y 个，白球 z 个，所以 $\begin{cases}x+y+z=6\\ x\le 2\\ y\le 3\\ z\le 5\end{cases}$，

可得到 (x,y,z) 有

$(2,0,4),(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),(1,0,5),(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(0,1,5),(0,2,4),(0,3,3)$，

所以不同的取法数有

$C_2^2C_5^4+C_2^2C_3^1C_5^3+C_2^2C_3^2C_5^2+C_2^2C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^0C_5^5+C_2^1C_3^1C_5^4+C_2^1C_3^2C_5^3+C_2^1C_3^3C_3^2+$

$C_3^1C_3^5+C_3^2C_5^4+C_3^3C_3^3=210$.

7.已知曲线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-3,4),B(5,4)$，则 $2a+b=$________.

解析：显然曲线关于 $x=\frac{-3+5}{2}=1$ 对称，即 $-\frac{b}{2a}=1$，即 $2a+b=0$.

8.过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线 m 交抛物线于 A，B 两点，若 A，B 的横坐标之和为 5，则这样的直线条数为________.

解析：根据焦点弦长得 $|AB|=5+p$，通径为 $2p$，若 $p=5$，则这样的直线仅有 1 条，若 $p>5$，则这样的直线仅有 0 条，若 $p<5$，则这样的直线仅有 2 条.填 0 或 1 或 2.

9.用同样大小的正 n 边形平铺整个平面（没有重叠），若要将平面铺满，则 n 的值为________.

微信公众号：数学研讨

解析：取正 n 边形的一个顶点记为 A，则其余正 n 边形沿顶点 A 平铺，设補满整个平面需要 x 个正 n 边形，相当于 x 个正 n 边形的内角 A 之和为 $360°$，即

$\dfrac{(n-2)\times180°}{n}\times x=360°$，即 $x=\dfrac{2n}{n-2}=2+\dfrac{4}{n-2}$ 为整数，所有 $n-2=1,2,4$，即 $n=3,4,6$.

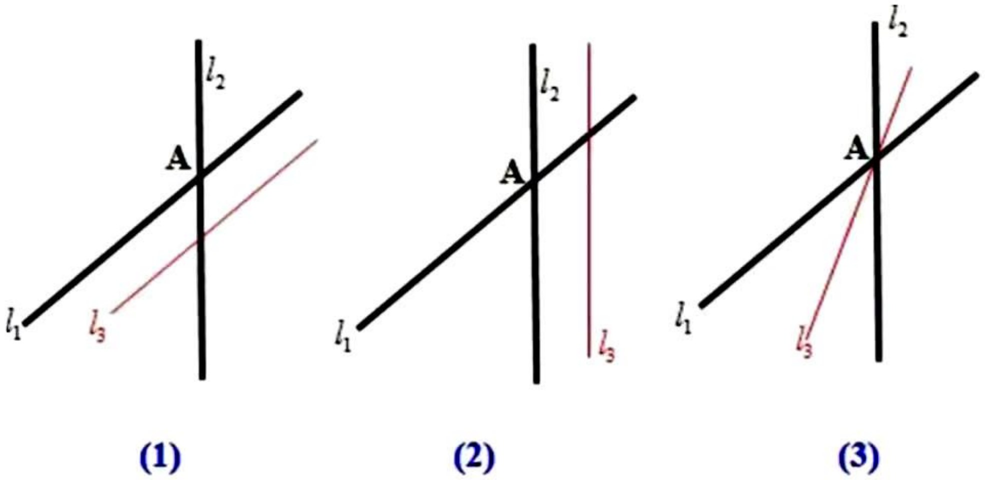
10.若三条直线$l_1:x-2y+2=0$，$l_2:x=2$，$l_3:x+ky=0$将平面划分成 6 个部分，则实数k的可能取值有（　　）

A.唯一一个　　　　B.有两个

C.有三个　　　　D.无穷多个

微信公众号：数学研讨

解析：注意到l_1与l_2有一个交点，记为A，将平面划分成 6 个部分，只有以下三种情况，所有$k=-2$或$k=0$，或$k=-1$，选 C.



11.已知非零实数a,b,c，若$\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b},\dfrac{ab}{c}$成等差数列，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $|b| \le |ac|$　　B. $|b| \le \dfrac{|a|+|c|}{2}$

C. $b^2 \ge |ac|$　　D. $a^2 \le b^2 \le c^2$

解析：由题意得 $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}=\dfrac{2ca}{b}$，即 $2a^2c^2=\left(a^2+c^2\right)b^2 \ge 2b^2|ac|$，所以 $b^2 \le |ac|$，所以 $b^2 \le |ac| \le \left(\dfrac{|a|+|c|}{2}\right)^2$，即 $|b| \le \dfrac{|a|+|c|}{2}$，又 $2a^2c^2=\left(a^2+c^2\right)b^2$ 得 $\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}$，所以必有 $\dfrac{1}{a^2} \le \dfrac{1}{b^2} \le \dfrac{1}{c^2}$ 或者 $\dfrac{1}{c^2} \le \dfrac{1}{b^2} \le \dfrac{1}{a^2}$，即 $a^2 \le b^2 \le c^2$ 或者 $c^2 \le b^2 \le a^2$，故选 B.

12.函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意的 $x \in D$，都存在唯一的 $y \in D$，使得 $f(x)+f(y)=4$，则称 $f(x)$ 在定义域 D 上的和为 4，给出下列函数：（1）$y=\ln x, x \in \left[\dfrac{1}{e}, e^5\right]$；（2）$y=x^2-1, x \in \left[-1, \sqrt{6}\right]$；（3）$y=\dfrac{x}{x-1}, x<1$；（4）$y=xe^x$ 其中和为 4 的序号为________.

微信公众号：数学研讨

解析：作出大致图像可以看出（1）（2）（4）

（注：这四个函数官方的忘记了，这 4 个函数是自己瞎编的，懂个意思就行了）

13.若集合 M 中任意两个元素的和差积商的运算结果都在 M 中，则称 M 是封闭集合.下列给出集合（1）$\mathbf{R}$；（2）Q；（3）$\complement_{\mathbf{R}} Q$；（4）$\left\{x \middle| x=\sqrt{2}m+n, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\right\}$，

其中封闭集合的序号为________.

解析：(1) $\mathbf{R}$；(2) Q 是封闭集合，对于(3) $\sqrt{2}$ 与 $3-\sqrt{2}$ 的和不封闭；(4) $2\sqrt{2}+3$ 与 $-3+\sqrt{2}$ 有 $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-1)}{7}=\dfrac{6}{7}-\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$ 不封闭，故填（1）（2）.

14.方程 $x(x+1)-1=y^2$ 的正整数解个数为________.

解析：方程即 $x^2+x-1=y^2$，即 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=y^2$，即 $(2x+1)^2-(2y)^2=5$

所以 $(2x+2y+1)(2x-2y+1)=5\times 1$，因为 $x,y\in\mathbf{Z}_+$。

所以 $\begin{cases}2x+2y+1=5\\2x-2y+1=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，有 1 个整数解.

15.若 $a,b<0$，且满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a-b}$，则 $\dfrac{a}{b}=$________.

解析：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a-b}$ 即 $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a-b}$，所以 $\dfrac{a^2-b^2}{ab}=1$，即 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=1$，令 $\dfrac{a}{b}=x$，则 $x>0$，得 $x-\dfrac{1}{x}=1$，即 $x^2-x-1=0$，解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

微信公众号：数学研讨

16.若四面体的各个顶点到平面 α 的距离者则称平面 α 为该四面体的中位面，则

一个四面体的中位面的个数为________.

解析：记平面 α 两侧的点个数为 (x,y)，则 (x,y) 可以为 $(3,1),(2,2)$，所以有 $4+3=7$ 种中位面.

17.设 $m(a)$ 是函数 $f(x)=\left|x^2-a\right|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值，则 $m(a)$ 的最小值为________.

解析：$m(a)=\max\{|1-a|,|a|\}$，所以 $2m(a)\ge|1-a|+|a|\ge1$，即 $m(a)\ge\dfrac{1}{2}$.

18.立方体 8 个顶点任意两个顶点的连线中，构成异面直线的对数________.

解析：每个四面体有 3 对异面直线，所以立方体 8 个顶点任意两个顶点的连线中，构成异面直线的对数为 $3\times\left(C_8^4-6-6\right)=174$ 对.

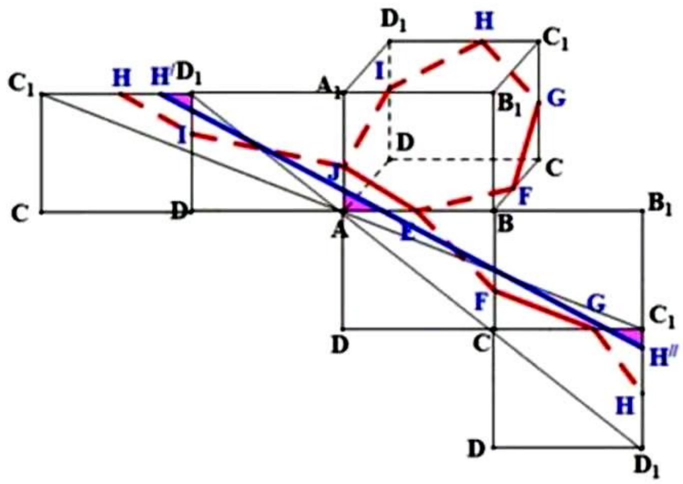
微信公众号：数学研讨

19.用一平面截一个棱长为 1 的正方体，若截面是六边形，则此六边形的周长最小值为________.

解析：对正方体进行面的展开平铺在一个平面上，可以发现，六边形的周长最短，即六个顶点在同直线上，即 $H'H''$ 为所求的最短周长，此时 $H'D_1=C_1H''$.

$\triangle AD_1I \cong \triangle JAE \cong \triangle GC_1H \cong \triangle GCF \cong \triangle EFB$，故 E,F,G,H,I,J 均为中点，

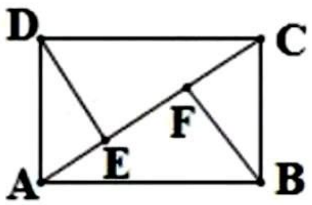
所以这是正六边形，周长为 $6\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$．

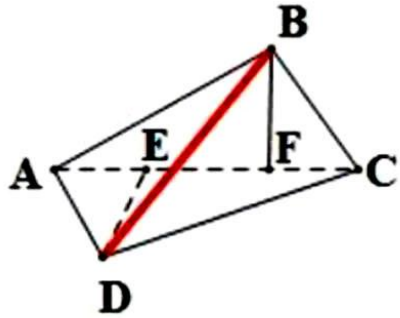


20.矩形 $ABCD$ 的边 $AB=\sqrt{2}$，过 B,D 作 AC 的垂线，垂足分别为 E,F，且 E,F 分别是 AC 的三等分点，沿 AC 将矩开翻浙，使得二面角 $B-AC-D$ 为直二面角，则 DB 的长度为________.微信公众号：数学研讨

解析：设 $AC=3x$，则 $AD=BC=\sqrt{9x^2-2}$，由 $\triangle ABC\backsim\triangle BFC$，得 $\frac{\sqrt{9x^2-2}}{x}=\frac{3x}{\sqrt{9x^2-2}}$，即得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $AC=\sqrt{3},AD=1$，

所以 $BF=DE=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}},BD=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$．





21.平面上给定 5 个点，其中任意三点不共线，过任意两点作直线，已知任意两条直线既不平行也不垂直，过 5 点中任意一点向另外四点的连线作垂线，则所有这些垂线的交点（不包括已知的 5 点）个数至多有________.

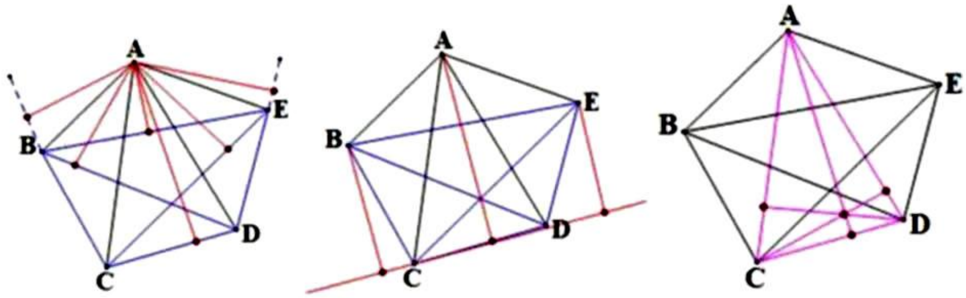
解析：记给定的 5 点分别为 A,B,C,D,E，过其中一个点作另外四点连线的垂线，共有 6 条，所以 5 个点功能产生 30 条垂线，任取 2 条垂线，共有交点 $C_{30}^{2}=435$ 个，其中

（1）由同一顶点出发的 6 条垂线的交点是顶点，有 $5\times C_{6}^{2}=75$ 个，要舍去；

（2）由其中三点，作另外两点连线的垂线时，得到的 3 条垂线是平行的，没有交点，此时共有 $C_{5}^{3}=10$ 组 3 条垂线，多算了 $10C_{3}^{2}=30$ 个交点，要舍去；

（3）由 5 个点中的三点构成三角形，此时的垂线有 3 条，且这三条垂线交于一点，多算了 $C_{3}^{2}-1=2$ 个，此种情况共多算了 $2\times C_{5}^{3}=20$ 个；

所以至多有 $435-75-30-20=310$.



22.已知实数a,b满足$(a+b)^{59}=-1$，$(a-b)^{60}=1$，则$\sum_{n=1}^{60}\left(a^n+b^n\right)=$________.

解析：$\begin{cases}(a+b)^{59}=-1\\(a-b)^{60}=1\end{cases}$，得$\begin{cases}a+b=-1\\a-b=\pm1\end{cases}$解，得$\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$ 或者$\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$

所以$\sum_{n=1}^{60}\left(a^n+b^n\right)=\sum_{n=1}^{60}(-1)^n=-30+30=0$.

23.甲乙丙三人的职业分别是A,B,C，现已知乙的年龄比C大，丙的年龄和B不同，B比甲的的年龄小，则甲乙丙的职业依次为________.

解析：由B比甲的的年龄小得：甲不能是B，且甲$>B$；

由丙的年龄和B不同，得丙不能是B，所以乙的职业是B.

再由乙的年龄比C大，即$B>C$，结合甲$>B$可得：甲的是A，丙的是C.

故填ABC.

24.函数$f(x)=\dfrac{4\sin x\cos x+3}{\sin x+\cos x}$在$x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$上的最小值为________.

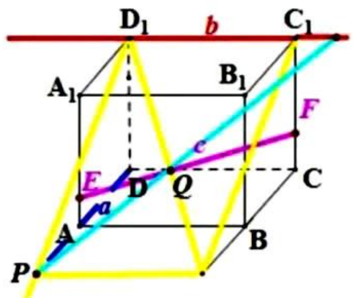
解析：令 $t=\sin x+\cos x, x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，得 $t\in\left(0,\sqrt{2}\right]$，且 $2\sin x\cos x=t^2-1$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 即为 $g\left(t\right)=\frac{2t^2+1}{t}=2\left(t+\frac{\frac{1}{2}}{t}\right)\geq 2\times 2\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\frac{\frac{1}{2}}{t}$，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=-\frac{\pi}{12}$ 时，取得等号.故填 $2\sqrt{2}$.

25.空间中有三条直线 a,b,c 两两异面，则与这三条直线都相交的直线有________条. 微信公众号：数学研讨

解析：将这三条异面直线放入立方体中，如图所示，在直线 a 上任意取一点 P，结合直线 b 可以构造黄色平面，找出它与直线 c 的交点 Q，则直线 PQ 必然与三条直线 a,b,c 都相交；同理，这样的 P 点是任意取的，所以得到的直线 PQ 也是有无数条.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》