2023届炎德英才长郡十八校联盟高三第二次联考(全国卷)

数学(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	D	B	D	B	A	D	D	A	B	A	C	C

1. D 【解析】因为 $M=\{a\mid -1<a\leqslant 3,a\in\mathbf{Z}\}$,所以 $M=\{0,1,2,3\}$,又 $N=\{-1,0,1,2,3\}$,所以 $M\cap N=\{0,1,2,3\}$. 故选:D.

2. B 【解析】$\begin{cases}a^2-4=0,\\ a+2\neq 0,\end{cases}\Rightarrow a=2$. 故选 B.

3. D 【解析】对于 A 选项,8 月每天最低气温的极差小于 15℃,A 错;
对于 B 选项,8 月每天最高气温不低于 40 ℃的数据有 8 个,其它都低于 40 ℃,把 31 个数据由小到大排列,平均数必小于 40 ℃,B 错;
对于 C 选项,8 月前 15 天每天最高气温的数据极差小,波动较小,因此 8 月前 15 天每天最高气温的方差小于后 16 天最高气温的方差,C 错;
对于 D 选项,8 月每天最高气温的数据波动也比每天最低气温的数据波动大,
因此 8 月每天最高气温的方差大于每天最低气温的方差,D 对. 故选:D.

4. B 【解析】由题知,双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的焦点在 y 轴上,其中 $a=1,b=m$,圆 $(x-2)^2+y^2=1$,其中圆心为 $(2,0)$,半径为 1,所以渐近线方程为 $x=\pm my$,其中一条为 $x=my$,即 $x-my=0$,因为双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切,所以 $\frac{|2-0|}{\sqrt{1+m^2}}=1$,解得 $m=\sqrt{3}$,故选:B.

5. A 【解析】因为 $\cos\alpha+3\sin\alpha=0$,所以 $3\sin\alpha=-\cos\alpha$,所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$,
又因为 $\tan\alpha=\frac{a}{-1}=\frac{2}{b}=-\frac{1}{3}$,所以 $a=\frac{1}{3}$,$b=-6$,所以 $b-3a=-7$,故选:A.

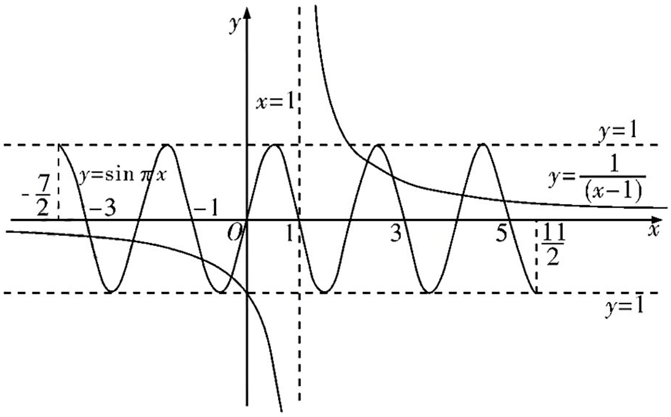
6. D 【解析】$a=\log_4 9>\log_4 8=\frac{3}{2}=b=\log_3\sqrt{27}$,又 $b^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3>c^3=\mathrm{e}$,$\therefore c<b<a$. 故选 D.

7. D 【解析】因为 $|MA|=|MB|$ 且 $|NA|=|NB|$,所以 MN 是 AB 的中垂线,又 $A(2,0)$,$B(0,2)$,所以 AB 中点为 $(1,1)$,$k_{AB}=\frac{2-0}{0-2}=-1$,故 MN 所在直线为 $y-1=x-1$,即 $x-y=0$,根据题意,直线 $x-y=0$ 与所给曲线有两个交点则存在 M,N 满足题意. 因为 $x-y=0$ 过原点,而原点在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 内部,故直线与椭圆必有两个交点,符合题意;因为 $(x-2)^2+y^2=2$ 的圆心为 $(2,0)$,$r=\sqrt{2}$,所以圆心到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|2-0|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$,所以直线 $x-y=0$ 与圆相切,只有一个交点,不符合题意;把 $x-y=0$ 代入 $y^2=4x$,可得 $x^2=4x$,显然方程有两非负解,符合题意;因为双曲线 $x^2-y^2=4$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$,所以直线 $x-y=0$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 无交点,故不符合题意. 综上,②④错误,①③正确. 故选:D.

8. A 【解析】设该数列为 $\{a_n\}$,则 $a_1=1,a_2=3,a_3=7,a_4=13$;
由二阶等差数列的定义可知,$a_2-a_1=2,a_3-a_2=4,a_4-a_3=6$,
所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=2$ 为首项,公差 $d=2$ 的等差数列,
即 $a_{n+1}-a_n=2n$,所以
$a_2-a_1=2$,
$a_2-a_2=4$,
$a_4-a_3=6$,
……
$a_{n+1}-a_n=2n$,
将所有上式累加可得 $a_{n+1}-a_1=n(n+1)$,所以 $a_{11}=10(10+1)+1=111$.
即该数列的第 11 项为 $a_{11}=111$. 故选:A.

9. B 【解析】由题意可得：$f(x)=1+\sin \pi x-x\sin \pi x$，令 $f(x)=0$，且 $f(1)=1\neq 0$，可得 $\sin \pi x=\dfrac{1}{x-1}(x\neq 1)$，

∵$y=\sin \pi x$ 与 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 均关于点$(1,0)$对称，由图可设 $y=\sin \pi x$ 与 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的交点横坐标依次为 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$，根据对称性可得 $x_1+x_8=x_2+x_7=x_3+x_6=x_4+x_5=2$，故函数 $f(x)$ 在$[-3,5]$上所有零点之和为 $2\times 4=8$. 故选：B.



10. A 【解析】易知最小值只能在极小值处取得，$f'(x)=\dfrac{(x-2)(x-a)}{e^x}(1<x<3)$，

解得导数零点为 $x_1=2,x_2=a$，根据题意可得 $a\leqslant 2$.

当 $a=2$ 时，在$(1,3)$上 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在$(1,3)$上单调递增，无最值；

当 $1<a<2$ 时，在$(1,a)$上 $f'(x)>0$，$(a,2)$上 $f'(x)<0$，$(2,3)$上 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在$(1,a)$上单调递增，$(a,2)$上单调递减，$(2,3)$上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 取得极小值 $f(2)$，又极小值必须为最小值，

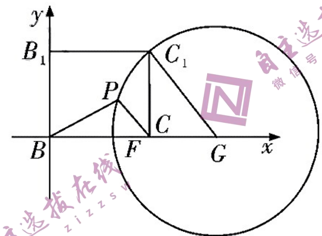
所以 $f(1)\geqslant f(2)$，即$\dfrac{1^2-a+a}{-e}\geqslant\dfrac{2^2-2a+a}{-e^2}$，所以 $1<a\leqslant 4-e$；

当 $a\leqslant 1$ 时，在$(1,2)$上 $f'(x)<0$，$(2,3)$上 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在$(1,2)$上单调递减，$(2,3)$上单调递增，此时函数 $f(x)$ 有最小值满足条件，

综上所述，a 的取值范围为$(-\infty,4-e]$. 故选：A.

11. C 【解析】



因为$\dfrac{BP}{PC}=\sqrt{2}$，且 $BC=2$，如图设 $P(x,y)$，$(0<x<2,0<y<2)$，$B(0,0)$，$C(2,0)$，$BP=\sqrt{x^2+y^2}$，$CP=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，所以 $BP=\sqrt{2}PC\Rightarrow x^2+y^2=2(x^2-4x+4+y^2)$，

所以 $x^2+y^2-8x+8=0$，所以$(x-4)^2+y^2=8$，点 P 的轨迹是以 $G(4,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆在正方形 BCC_1B_1 内部的弧，且 l_{BC_1} 的方程为 $y=x$，点$(4,0)$到该直线的距离为 $2\sqrt{2}$，

所以 BC_1 与圆 G 相切于 C_1 点，但 P 不在正方形 BCC_1B_1 边界上，所以无公共点，①正确；

若 $PB\perp PC$，则点 P 在以 $Q(1,0)$ 为圆心，1 为半径的圆上，由图显然两圆有交点在正方形 BCC_1B_1 内部，所以②正确；

若 V_{P-BCD} 最大，则 P 到 BC 距离最大，即 P 在 CC_1 与圆 G 的交点 C_1 处，但 P 不在正方形 BCC_1B_1 边界上，所以最大值取不到，故③错误；又因为 $CC_1=CG=2$，所以$\triangle C_1GC$ 为等腰直角三角形，(如图)因为 FC_1 为点 P 的运动轨迹，所以$\overset{\frown}{FC_1}=\dfrac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot 2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$. 故④正确；故选：C.

12. C 【解析】因为 $f(x)\geqslant g(x)$，$x>0$，$a>0$，所以 $e^x+x\geqslant ax+\ln ax$，即 $e^x+x\geqslant e^{\ln ax}+\ln ax$，

令 $h(x)=e^x+x$，则 $h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

由 $h(x)\geqslant h(\ln ax)$，可得 $x\geqslant \ln ax$，$x\geqslant \ln x+\ln a$，则 $x-\ln x\geqslant \ln a$ 恒成立，所以$(x-\ln x)_{\min}\geqslant \ln a$，

令 $m(x)=x-\ln x$，$m'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，令 $m'(x)=0$，得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$，$m'(x)<0$，$m(x)$ 在$(0,1)$上单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$，$m'(x)>0$，$m(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，

所以 $m(x)_{\min}=m(1)=1$，所以 $\ln a\leqslant 1$，解得 $0<a\leqslant \mathrm{e}$，所以 a 的最大值为 e. 故选：C.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

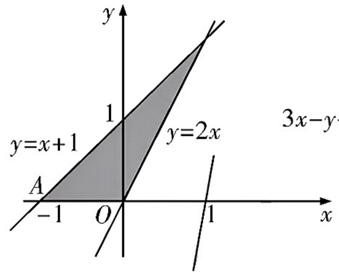
13. -3

14. 5 【解析】由约束条件作出可行域，如图中阴影部分所示. 由点到直线的距离公可知，

目标函数 $z=|3x-y-2|$ 的几何意义是可行域内的点到直线 l：$3x-y-2=0$ 的距离的 $\sqrt{10}$ 倍.

数形结合可知，可行域内到直线 l 的距离最大的点为 $A(-1,0)$，

且点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|3\times(-1)-0-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$，则 $z=|3x-y-2|$ 的最大值为 5.



15. $[-2,1-2\sqrt{2}]$ 【解析】函数 $y=\sqrt{\dfrac{-x}{1+2x}}$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$，又 $y=\dfrac{4x^2-2x+2}{2x-1}=2x-1+\dfrac{2}{2x-1}+1$，

令 $t=2x-1$，由 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$ 得 $t\in(-2,-1]$，则 $y=t+\dfrac{2}{t}+1$，

因为 $y=t+\dfrac{2}{t}+1$，在 $t\in(-2,-\sqrt{2})$ 时为增函数，$t\in(-\sqrt{2},-1]$ 为减函数，

所以当 $t=-\sqrt{2}$ 即 $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ 时，函数取得最大值 $1-2\sqrt{2}$，当 $t=-1$ 即 $x=0$ 时，函数取得最小值 -2.

故答案为：$[-2,1-2\sqrt{2}]$.

16. ③④ 【解析】根据题意，$f(2^n)=f(2\cdot 2^{n-1})=2f(2^{n-1})+2^{n-1}f(2)=2f(2^{n-1})+2^n$，

故可得：$a_n=\dfrac{f(2^n)}{2^n}=\dfrac{f(2^{n-1})}{2^{n-1}}+1=a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$；$b_n=\dfrac{f(2^n)}{n}=\dfrac{2^n}{n}a_n$，

对①：由等差数列的定义，结合上述推导可知，$\{a_n\}$是首项为 $a_1=\dfrac{f(2)}{2}=1$，公差为 1 的等差数列，故 $a_n=n$；

则①错误；来源：高三答案公众号

对②：因为 $b_n=\dfrac{f(2^n)}{n}=\dfrac{2^n}{n}a_n=2^n$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，故$\{b_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则②错误；

对③：由上述推导可知：$a_n\cdot b_n=n\cdot 2^n$，故 $S_n=1\times 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，

$2S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，两式相减得 $-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$，

$-S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$， 即 $-S_n=2(2^n-1)-n\cdot 2^{n+1}$， 故可得 $S_n=(n-1)2^{n+1}+2$，

故③正确；

对④：$\dfrac{1}{a_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=\dfrac{1}{n\cdot\log_2 2^{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

则 $T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}<1$ 恒成立，故④正确；

对⑤：$\sqrt{a_n\log_2 b_{n+1}}=\sqrt{n\log_2 2^{n+1}}=\sqrt{n\cdot(n+1)}$，

当 $n=1$ 时，$R_n=\sqrt{2}$，而此时$\dfrac{n^2+n}{2}=1$，不满足 $R_n<\dfrac{n^2+n}{2}$，故⑤错误.

综上所述，正确的有③④. 故答案为：③④.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.【解析】(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，…………………………………………（2 分）

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， ……………………（4 分）

所以函数 $f(x)$的严格单调递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ………………………………………（6 分）

(2)由 $f(B)=2\sin(2B+\frac{\pi}{6})-1=0$,得 $\sin(2B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

所以 $2B+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2B+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.

因为 B 是三角形内角,所以 $B=\frac{\pi}{3}$, ……………………………………………………………(8 分)

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,所以 $ac=3$. ……………………………………………………………(9 分)

又 $a+c=4$,所以 $a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=16-2\times3=10$.

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$,则 $b=\sqrt{7}$, ……………………………………………………(11 分)

所以△ABC 的周长为 $4+\sqrt{7}$. ……………………………………………………………………(12 分)

18.【解析】(1)列联表如下:

	观看过本届世界杯决赛直播	没有观看过本届世界杯决赛直播	总计
高三年级学生	20	6	26
非高三年级学生	10	14	24
总计	30	20	50

………… (2 分)

$K^2=\frac{50\times(20\times14-10\times6)^2}{26\times24\times30\times20}\approx6.464<6.635$, ……………………………………(4 分)

没有 99%的把握认为是否“观看过本届世界杯决赛直播”与年级有关. ……………………………(6 分)

(2)从抽取的“观看过本届世界杯决赛直播”人群中,按年级采用分层抽样的方法抽取 6 人,

这 6 人中高三年级“观看过本届世界杯决赛直播”学生有 4 人(设为 a,b,c,d),非高三年级“观看过本届世界杯决赛直播”学生有 2 人(设为 A,B), ……………………………………………………(8 分)

从 6 人中抽取 2 人有 $AB,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd,ab,ac,ad,bc,bd,cd$ 共 15 种,记事件 M 为“抽取的 2 人都为高三年级观看过本届世界杯决赛直播学生”,

则 M 包含有 ab,ac,ad,bc,bd,cd 共 6 种情况, ………………………………………………(10 分)

所以 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. ……………………………………………………………………(12 分)

19.【解析】(1)证明:在等边△PCD(如图甲)中,B 为 PC 的中点,所以 $BD\perp BC$,由题意(如图乙).可知 $PH\perp$平面 $ABCD$,因为 $BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PH\perp BC$.

又因为 $PH,BD\subset$平面 PBD,$PH\cap BD=H$,所以 $BC\perp$平面 PBD.

又 $BC\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 PBD. ………………………………………………(6 分)

(2)因为 $BD\perp BC$,并且$\angle BCD=60°$,$BC=2$,所以 $BD=2\sqrt{3}$,可求得△BDC 边 CD 的高为$\sqrt{3}$,

四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,则 $S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$,又 A,B 均为中点,

所以 $AB\,/\!/\,CD$,则△$HDC\backsim$△HBA,所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{AH}{CH}=\frac{1}{2}$,即 $AH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,在 Rt△PAH 中,$PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$,所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{梯形ABCD}\cdot PH=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}=2\sqrt{2}$,

$\therefore V_{P-HBC}=\frac{2}{3}V_{P-ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot V_{P-ABCD}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. ……………………………………………(12 分)

20.【解析】(1)设直线 PQ 与 x 轴交于 $P_0\left(-\frac{p}{2},0\right)$.由几何性质易得:△$CPP_0$ 与△OCP 相似,

所以$\frac{|CP|}{|CP_0|}=\frac{|CO|}{|CP|}$,$|CP|^2=|CP_0|\cdot|CO|$,即:$3=\left(-\frac{p}{2}+2\right)\cdot2$,解得:$p=1$,

所以抛物线 E 的标准方程为:$y^2=2x$. ……………………………………………………………(4 分)

(2)设 $T(x_0,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

(i)由题意,TA 中点 M 在抛物线 E 上,即$\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{x_0+x_1}{2}$,

又 $y_1^2=2x_1$,将 $x_1=\frac{y_1^2}{2}$代入,

得：$y_1^2-2y_0y_1+4x_0-y_0^2=0$，

同理：$y_2^2-2y_0y_2+4x_0-y_0^2=0$，

有$\begin{cases}y_1+y_2=2y_0,\\ y_1y_2=4x_0-y_0^2,\end{cases}$此时 D 点纵坐标为$\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0$，

所以直线 TD 的斜率为 0. ……………………………………………………（7 分）

（ⅱ）因为$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4}=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}=\dfrac{3y_0^2-4x_0}{2}$，

所以点 $D\left(\dfrac{3y_0^2-4x_0}{2},y_0\right)$，此时 $S=\dfrac{1}{2}|TD|\cdot|y_1-y_2|$，……………………（8 分）

$|TD|=\left|\dfrac{3y_0^2-4x_0}{2}-x_0\right|=\dfrac{3}{2}|y_0^2-2x_0|$，$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{8(y_0^2-2x_0)}$，

所以 $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(y_0^2-2x_0)^3}$，……………………………………………（9 分）

又因为点 T 在圆 C 上，有$(x_0+2)^2+y_0^2=3$，即 $y_0^2=-x_0^2-4x_0-1$，代入上式可得：

$S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(-x_0^2-6x_0-1)^3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{[-(x_0+3)^2+8]^3}$，……………………（10 分）

由$-2-\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant -2+\sqrt{3}$，

所以 $x_0=-3$ 时，S 取到最大值$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{8^3}=48$，………………………………（11 分）

所以 S 的最大值为 48. ……………………………………………………（12 分）

21.**【解析】**(1)$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，所以在$\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以 $f(x)$单调递增区间为$\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. ………………（2 分）

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(-\pi)=f(\pi)=-1$，$f(0)=1$，

$\therefore f(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)_{\min}=-1$. ……………………………………………（4 分）

(2)**解法一：**设 $F(x)=x\sin x+\cos x-a(x^2+1)$，$x\in[0,\pi]$，$F'(x)=x\cos x-2ax=x(\cos x-2a)$，

当 $2a\leqslant -1$，即 $a\leqslant -\dfrac{1}{2}$时，$F'(x)\geqslant 0$，$F(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，

$F_{\max}(x)=F(\pi)=-1-a(\pi^2+1)\geqslant 0$，$a\leqslant -\dfrac{1}{\pi^2+1}$，所以 $a\leqslant -\dfrac{1}{2}$成立；……………………（6 分）

当 $2a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$F'(x)\leqslant 0$，$F(x)$在$[0,\pi]$上单调递减，

$F_{\max}(x)=F(0)=1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$，所以$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$；

当$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，$\cos x_0=2a$，

当 $x\in(0,x_0)$，$\cos x>2a$，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

当 $x\in(x_0,\pi)$，$\cos x<2a$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，……………………………（7 分）

所以 $F_{\max}(x)=F(x_0)=x_0\sin x_0+\cos x_0-a({x_0}^2+1)$

$=x_0\sin x_0+\cos x_0-\dfrac{1}{2}\cos x_0({x_0}^2+1)$

$=x_0\sin x_0+\dfrac{1}{2}\cos x_0-\dfrac{{x_0}^2}{2}\cos x_0$. ……………………………………………（9 分）

令 $\varphi(x)=x\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{x^2}{2}\cos x$，$x\in(0,\pi)$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x^2}{2}\sin x>0$，所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$，$F(x_0)\geqslant 0$ 成立. ……………（11 分）

综上,a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …………………………………………………………………………………………(12 分)

解法二: $\exists x_0\in[0,\pi]$ 使得不等式 $x_0\sin x_0-ax^2\geqslant a-\cos x_0$ 成立,即 $a\leqslant\dfrac{x_0\sin x_0+\cos x_0}{x_0^2+1}$ 在 $x_0\in[0,\pi]$ 上有解. …………………………………………………………………………………………(6 分)

令 $g(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+1}$,则 $g'(x)=\dfrac{x^3\cos x-2x^2\sin x-x\cos x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x(x^2\cos x-2x\sin x-\cos x)}{(x^2+1)^2}$,

令 $\varphi(x)=x^2\cos x-2x\sin x-\cos x$,则 $\varphi'(x)=2x\cos x+x^2(-\sin x)-2\sin x-2x\cos x+\sin x=-x^2\sin x-\sin x\leqslant0$,

$\therefore\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减,$\therefore\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=-1<0$,$\therefore\varphi(x)<0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立,$\therefore g'(x)\leqslant0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立,$\therefore g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减,$\therefore g(x)\leqslant g(0)=1$,

$\therefore g(x)_{\max}=1$, …………………………………………………………………………………………(11 分)

$\therefore a\leqslant1$. …………………………………………………………………………………………(12 分)

(2)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.【解析】(1)由题意得,$\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{4}\left(\lambda^2+2+\dfrac{1}{\lambda^2}\right),\\ y^2=\dfrac{3}{4}\left(\lambda^2-2+\dfrac{1}{\lambda^2}\right),\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2-2=\lambda^2+\dfrac{1}{\lambda^2},\\ \dfrac{4}{3}y^2+2=\lambda^2+\dfrac{1}{\lambda^2},\end{cases}$

所以两式相减,可得曲线 C 的直角坐标方程:$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………………(5 分)

(2)直线 l 的方程可转化为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$,

得 $t^2+6\sqrt{2}t+9=0$,则 $\begin{cases}t_1+t_2=-6\sqrt{2},\\ t_1\cdot t_2=9,\end{cases}$

所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{-(t_1+t_2)}{t_1t_2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …………………………………………(10 分)

23.【解析】(1)因为 a,b,c 均为正数,所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$,则 $\dfrac{1}{abc}\leqslant\dfrac{1}{27}$,所以 $abc\geqslant27$.

当且仅当 $a=b=c=3$ 时,取得等号. …………………………………………………………………………(5 分)

(2)由基本不等式可知,$b+c\geqslant2\sqrt{bc}$,$a+c\geqslant2\sqrt{ac}$,$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,

所以 $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\dfrac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{2\sqrt{abc}}{a}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{b}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{c}$

$=2\sqrt{abc}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=2\sqrt{abc}$,

当且仅当 $a=b=c=3$ 时,取得等号.

故 $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant2\sqrt{abc}$. …………………………………………………………(10 分)