

2022~2023 下学年高三年级 TOP 二十名校猜题大联考(二)

数 学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $\frac{-3}{1+i} = 2-i$, 则 $|z| =$

- A. 5 B. $\sqrt{26}$ C. 6 D. $\sqrt{37}$

2. 设集合 $M = \{x | x = k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{3} + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$
C. $M \cap N = \emptyset$ D. $N \cap (\complement_{\mathbb{R}} M) = \emptyset$

3. 曲线 $y = \frac{x^3}{3} - 2$ 在点 $(-1, a)$ 处的切线方程为

- A. $3x + 3y + 4 = 0$ B. $3x + 3y - 4 = 0$
C. $3x - 3y + 4 = 0$ D. $3x - 3y - 4 = 0$

4. 设 a, b, c 都是单位向量, 且 $a = b - c$, 则向量 a, b 的夹角等于

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 若函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + a} - x)$ 为奇函数, 则 $f(0) + f(1) =$

- A. 0 无界学习公众号 B. $\ln(\sqrt{2} - 1)$
C. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ D. $\ln 2$

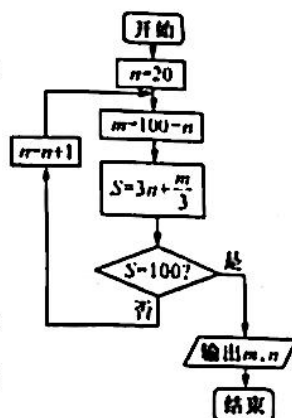
6. $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^{10}$ 的展开式中, x^{-7} 的系数等于

- A. 45 B. 10 C. -45 D. -10

7. 已知 $\sin(\frac{\pi}{12} - x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) =$

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $-\frac{\sqrt{13}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

8. 我国明朝数学家程大位著的《算法统宗》里有一道闻名世界的题目：“一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几丁？”如图所示的程序框图反映了对此题的一个求解算法，则



- A. 输出的 m 的值为 25
- B. 输出的 n 的值为 75
- C. 输出的 m 的值为大僧的人数
- D. 输出的 n 的值为大僧的人数

9. 椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是椭圆 E 上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1, PF_2 , 设 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PQ 交椭圆 E 的长轴于点 $Q(m, 0)$, 则 m 的取值范围为

- A. $(-1, 1)$
- B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- C. $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
- D. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

10. 已知 $a = \ln 1.1, b = 0.1, c = e^{-a^3}$, 则

- A. $a < b < c$
- B. $b < a < c$
- C. $c < a < b$
- D. $b < c < a$

11. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $AG \perp BG$, 则 $\cos C$ 的取值范围是

- A. $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$
- B. $(0, \frac{4}{5})$
- C. $[\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{6}}{3})$
- D. $[\frac{4}{5}, 1)$

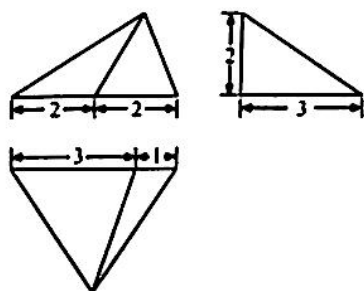
12. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, $AB \perp PD, AB = 2\sqrt{13}, PA = PD, \angle APD = 120^\circ$. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的体积为 $\frac{500\pi}{3}$, 设 M 是该球上的一动点, 则三棱锥 $M-PAB$ 体积的最大值为

- A. $\sqrt{39}$
- B. $2\sqrt{39}$
- C. $\frac{8\sqrt{39}}{3}$
- D. $\frac{16\sqrt{39}}{3}$

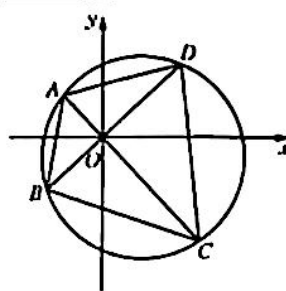
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 满足下列条件中的两个: ①实轴长为 4; ②焦距为 6; ③离心率 $e = 2$, 则双曲线 C 的方程为_____。(写出一个正确答案即可)

14. 若某几何体的三视图如图, 则该几何体的最长棱长为_____.



第 14 题图



第 15 题图

15. 如图, 经过坐标原点 O 且互相垂直的两条直线 AC 和 BD 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ 相交于 A, C, B, D 四点, 则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.

16. 已知 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 图象上有一最低点 $(\frac{11\pi}{6}, 1)$, 若图象上各点的纵坐标不变, 横坐标缩短为原来的 $\frac{3}{\pi}$, 再向左平移 1 个单位长度得 $y = f(x)$ 的图象, 又 $f(x) = 3$ 的所有根从小到大依次相差 3 个单位, 则 $a + b + c =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

李同学在暑假期间进行一项社会实践活动, 随机抽取了 80 名喜爱身体锻炼的年轻人, 调查他们是否将跑步作为主要锻炼方式, 得到如下数据不完整的列联表:

	将跑步作为主要锻炼方式	不是将跑步作为主要锻炼方式	合计
男性	20	20	
女性		30	
合计			80

(1) 请将列联表补充完整, 并判断能否有 99% 的把握认为是否将跑步作为主要锻炼方式与性别有关?

(2) 在被调查的 80 人中, 从不是将跑步作为主要锻炼方式的人群中按性别采取分层抽样的方法抽取 5 人参加体育健身学习活动, 再从中选取 2 人作为代表发言, 记 2 人中女性人数为 X , 求 X 的分布列与数学期望. 无界学习公众号

附: 参考公式及数据: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

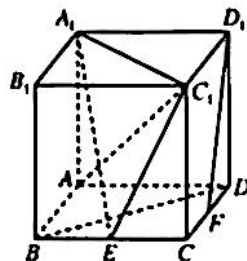
$P(K^2 \geq k_0)$	0.40	0.25	0.10	0.010	0.005	0.001
k_0	0.708	1.323	2.706	6.635	7.879	10.828

18. (本小题满分 12 分)

如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 BC, CD 的中点.

(1) 求证: $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ;

(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.





19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n = \frac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $\frac{5m-2}{4} < T_n < 5m$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $\Gamma: x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点到焦点 F 的距离比它到直线 $y = -4$ 的距离小 3.

(1) 求抛物线 Γ 的准线方程;

(2) 若过点 F 的直线 l 与抛物线 Γ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中垂线与抛物线 Γ 的准线交于点

C , 请问是否存在直线 l , 使得 $\tan \angle ACB = \frac{4}{3}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^a} - t$, 其中 $a, t \in \mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 存在极值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $t = 0$, $g(x) = a \left[\frac{1}{4} \ln^2(x^2 f(x)) - 1 \right] \ln x - (x-1)^2 (a \neq 0)$ 存在三个零点 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 < x_2 < x_3$.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 求证: $(3a-1)(x_1 + x_3 + 2) < 2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半

轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程以及曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 M 的极坐标为 $(6, \frac{\pi}{3})$, 点 N 是曲线 C 上的点, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = 2|x| + |2x-m| (m > 0)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 6$;

(2) 设 a, b 均为正数, 且 $a+b=m$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

