长沙市一中2023届高三月考试卷(八)

数 学

时量：120分钟　　满分：150分

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<2x\}$，集合 $B=\{x|\log_2(x-1)<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<3\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$　　C. $\{x|2\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|0<x<2\}$

2. 在复平面内，复数 z 与 $\frac{2}{1-i}$ 对应的点关于虚轴对称，则 z 等于

A. $1+i$　　B. $-1-i$　　C. $1-i$　　D. $-1+i$

3. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的一条渐近线与 x 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，则 C 的虚轴长是

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $6\sqrt{3}$

4. 若 $(1+x)(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 的值是

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 1

5. 在△ABC 中，"$\cos A+\sin A=\cos B+\sin B$"是"$\angle C=90^\circ$"的

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 长沙烈士公园西南小丘上兴建了烈士纪念塔，纪念为人民解放事业牺牲的湖南革命烈士，它是公园的标志. 为了测量纪念塔的实际高度，某同学设计了如下测量方案：在烈士纪念塔底座平面的 A 点位置测得纪念塔顶端仰角的正切值为 $\frac{3}{2}$，然后直线走了 20 m，抵达纪念塔底座平面 B 点位置测得纪念塔顶端的仰角为 $\frac{\pi}{3}$. 已知该同学沿直线行进的方向与他第一次望向烈士纪念塔底端的方向所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则该烈士纪念塔的高度约为

A. 30 m　　B. 45 m　　C. 60 m　　D. 75 m

7. 已知点 $P(2,2)$，直线 AB 与抛物线 $C:y^2=2x$ 交于 A、B 两点，且直线 PA，PB 的倾斜角互补，则直线 AB 的斜率为

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. -2

8. 函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ 在区间 $[t,+\infty)(t\in\mathbf{N}^*)$ 上存在极值，则 t 的最大值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.)

9. 已知 $a,b\in(0,+\infty)$，$\lambda=a+b$，$\mu=\sqrt{3ab}$，则

A. $\lambda-\mu<0$　　B. $\lambda-\mu\geqslant0$　　C. $\frac{\mu}{\lambda}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\mu}{\lambda}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1=2$，对一切正整数 n，都有 $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，则

A. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是等差数列

B. 对一切正整数 n 都有 $a_n>1$

C. 存在正整数 n，使得 $a_n=2a_{2n}$

D. 对任意小的正数 ε，存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon(n>n_0)$

11. 已知直线 $l:x-y+2=0$ 与 x 轴交于点 A，点 P 在直线 l 上，圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$ 上有且仅有一个点 B 满足 $AB\perp BP$，则点 P 的横坐标的取值可以为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. 5

12. 将 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个有编号的球随机放入 2 个不同的盒子中，已知每个球放入这 2 个盒子的可能性相同，且每个盒子容纳球数不限，记 2 个盒子中最少的球数为 $X(0\leqslant X\leqslant n, X\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法中正确的有

A. 当 $n=1$ 时，方差 $D(X)=\frac{1}{4}$

B. 当 $n=2$ 时，$P(X=1)=\frac{3}{8}$

C. $\forall n\geqslant3$，$\exists k\in[0,n)(k,n\in\mathbf{N}^*)$，使得 $P(X=k)>P(X=k+1)$ 成立

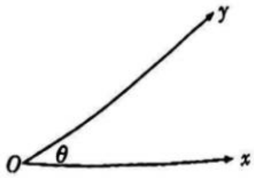
D. 当 n 确定时，期望 $E(X)=\frac{n(2^{2n}-C_{2n}^{n})}{2^{2n}}$

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. 函数 $f(x)$ 的图象在区间 $(1,3)$ 上连续不断，能说明“若 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上存在零点，则 $f(1)\cdot f(3)<0$”为假命题的一个函数 $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x)=$________.

14. 若随机变量 ξ 的数学期望和方差分别为 $E(\xi)$，$D(\xi)$，则对于任意 $\varepsilon>0$，不等式 $P(|\xi-E(\xi)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$ 成立. 在 2023 年湖南省高三九校联考中，数学科考试满分 150 分，某校高三共有 500 名学生参加考试，全体学生的成绩 ξ 的期望 $E(\xi)=80$，方差 $D(\xi)=4^2$，则根据上述不等式，可估计分数不低于 100 分的学生不超过________人.

15. 如图，在平面斜坐标系 xOy 中，$\angle xOy=60°$，平面上任意一点 P 关于斜坐标系的斜坐标这样定义：若 $\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2$(其中 e_1,e_2 分别是 x 轴，y 轴正方向的单位向量)，则 P 点的斜坐标为 (x,y)，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的斜坐标为 (x,y)，$\overrightarrow{OM}=(3,1)$，$\overrightarrow{ON}=(1,3)$，则 $\triangle OMN$ 的面积为________.



16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 $E\in$ 平面 AA_1B_1B，点 F 是线段 AA_1 的中点，若 $D_1E\perp CF$，则当 $\triangle EBC$ 的面积取得最小值时，三棱锥 $E-BCC_1$ 外接球的体积为________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

(1)已知 $f(\alpha)=\frac{8}{5}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，求 $\sin\alpha$；

(2)若不等式 $|f(x)-m|\leqslant 3$ 恒成立，求整数 m 的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=1$，$2na_n-2S_n=n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

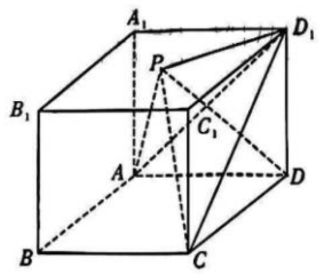
(2)令 $b_n=\frac{2-a_n}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，$\angle APC$ 是二面角 $A-PD_1-C$ 的平面角.

(1)证明：点 P 在 A_1C_1 上；

(2)若 $AB=BC$，求直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦的最大值.



20.（本小题满分 12 分）

(1)对于任意两个事件 A,B，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，证明：$\frac{P(A)}{P(\overline{A})}=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(B|\overline{A})}{P(B|A)}$；

(2)贝叶斯公式是由英国数学家贝叶斯发现的，它用来描述两个条件概率之间的关系. 该公式为：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，$P(B)>0$，有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)},i=1,2,\cdots,n.$$

(ⅰ)已知某地区烟民的肺癌发病率为 1%，先用低剂量 C 进行肺癌筛查，医学研究表明，化验结果是存在错误的. 已知患有肺癌的人其化验结果 99%呈阳性(有病)，而没有患肺癌的人其化验结果 99%呈阴性(无病)，现某烟民的检验结果为阳性，请问他真的患肺癌的概率是多少？

(ⅱ)为了确保诊断无误，一般对第一次检查呈阳性的烟民进行复诊. 复诊时，此人患肺癌的概率就不再是 1%，这是因为第一次检查呈阳性，所以对其患肺癌的概率进行修正，因此将用贝叶斯公式求出来的概率作为修正概率. 请问如果该烟民第二次检查还是呈阳性，则他真的患肺癌的概率是多少？

21.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=e^x-tx$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点，求 t 的取值范围.

(2)当 $t=1$ 时，证明：$\exists\xi\in(a,b)$（其中 $a>0$），使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=e^{\xi}-1$.

22.（本小题满分 12 分）

历史上第一个研究圆锥曲线的是梅纳库莫斯（公元前 375 年一公元前 325 年），大约 100 年后，阿波罗尼斯更详尽、系统地研究了圆锥曲线，并且他还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质：如图 1，从椭圆的一个焦点出发的光线或声波，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，其中法线 l' 表示与椭圆 C 的切线垂直且过相应切点的直线，已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$，若由 F_1 发出的光线经椭圆两次反射后回到 F_1 经过的路程为 $8c$. 对于椭圆 C 上除顶点外的任意一点 P，椭圆在点 P 处的切线为 l，F_1 在 l 上的射影为 H，其中 $|OH|=2\sqrt{2}$.

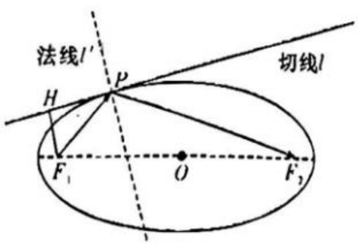


图1

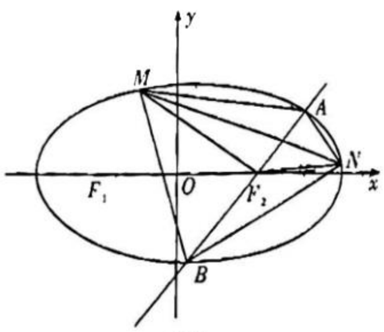


图2

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)如图 2，过 F_2 作斜率为 $k(k>0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于 A，B 两点（点 A 在 x 轴上方），点 M，N 是椭圆上异于 A，B 的两点，MF_2，NF_2 分别平分 $\angle AMB$ 和 $\angle ANB$，若 $\triangle MF_2N$ 外接圆的面积为 $\dfrac{81\pi}{8}$，求直线 m 的方程.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。