秘密★启用前

2022届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+4x-12<0,\ x\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid \sqrt{x+2}<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-2,\ 2)$　　B. $(-2,\ 2)$

C. $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$　　D. $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(1-2i)=1+i$，则 z 的共轭复数对应的点所在象限为

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 贵州六马盛产“蜂糖李”，其以果大味甜闻名当地. 网红“李子哥”以“绿水青山就是金山银山”理念为引导，大力推进绿色发展，现需订购一批苗木，苗木长度与售价如下表. 由表可知苗木长度 x/cm 与售价 y/元之间存在线性相关关系，回归方程为 $\hat{y}=0.3x+\hat{a}$. 当苗木长度为120cm时，估计价格为（　　）元.

x/cm	10	20	30	40	50	60
y/元	2	6	10	14	16	18

A. 36.5　　B. 35　　C. 37　　D. 35.5

4. 已知 α，β 是两个不同平面，m，n 是两条不同直线，给出下列命题：

①若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；

②若 $\alpha\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，则 $m\perp\beta$；

③若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$；

④若 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m\perp n$.

其中正确命题的个数为

A. 0　　B. 2　　C. 1　　D. 3

5. 如图1，达摩院青橙奖分别由陈杲、方璐（女）、金鑫、刘渊、陆盈盈（女）、王权、王志俊、韦东奕、赵慧蝉（女）、朱飞虎共10位青年科学家获得，每人获得奖金100万元，这也是青橙奖颁奖以来女科学家获奖人数首次达到三人. 为了向他们表示敬意，某视频网站UP主准备从中随机选择三位科学家将他们的经历做一期视频，要求所选的三人中至少有一名女科学家，则有多少种不同的选择

图1

A. 120　　B. 63　　C. 85　　D. 210

6. 在满足不等式组 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-2\leqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 的平面区域内随机取一点 $P(x_0,\ y_0)$，设事件 A 为 "$y_0<\frac{1}{2}x_0$"，那么事件 A 发生的概率为

A. $\frac{4}{27}$　　B. $\frac{13}{25}$　　C. $\frac{8}{27}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. 已知某几何体的三视图如图 2 所示，则该几何体的表面积是

A. 4

B. $6+2\sqrt{5}$

C. $2+2\sqrt{5}$

D. 6

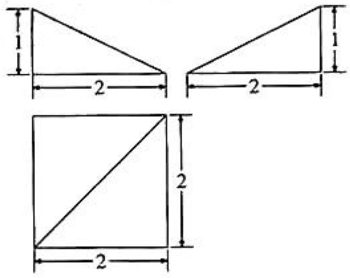

图 2

8. 已知 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，则 $\cos(2\alpha-\beta)=$

A. $-\frac{2}{11}$　　B. $-\frac{11\sqrt{5}}{25}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{25}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$

9. 如图 3，在△ABC 中，点 M 是 AB 上的点且满足 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$，$N$ 是 AC 上的点且满足 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}$，$CM$ 与 BN 交于 P 点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AP}=$

A. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　　B. $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

C. $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　　D. $\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

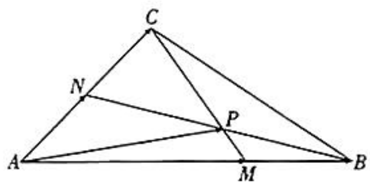

图 3

10. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的左、右焦点，动点 P 在双曲线的左支上，点 Q 为圆 G：$x^2+(y+2)^2=1$ 上一动点，则 $|PQ|+|PF_2|$ 的最小值为

A. 6　　B. 7　　C. $3+\sqrt{5}$　　D. 5

11. 函数 $g(x)=\sin(\omega x)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位得到函数 $f(x)$，且 $f(x)$ 在 $(\pi,\ 2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(0,\ \frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$

C. $\left(0,\ \frac{1}{6}\right)$　　D. $\left(0,\ \frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

12. 已知 $a=3^{\frac{1}{2}}$，$b=(1+e)^{\frac{1}{e}}$，$c=4^{\frac{1}{3}}$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $b>a>c$　　B. $c>b>a$

C. $c>a>b$　　D. $a>b>c$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和. 若$a_1=-7$，$S_3=-15$，则$a_8=$______.

14. $(1+2x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为______.

15. 已知x，y为正实数，且$x+y=2$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}$的最小值为______.

16. 已知$\triangle ABC$中，点$A(-1,0)$，点$B(1,0)$，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为S，且$a^2+b^2=c^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$，则满足条件的点$C$的轨迹长度为______

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_n\neq 0$，$a_1=1$，当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$c_n=a_{n+1}+2n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分12分）

某工厂为了提高某产品的生产质量引进了一条年产量为100万件的生产线，已知该产品的质量以某项指标值k为衡量标准. 为估算其经济效益，该厂先进行了试生产，并从中随机抽取了100件该产品，统计了每个产品的质量指标值k，并分成以下5组，其统计结果如下表所示：

质量指标值	[5，6)	[6，7)	[7，8)	[8，9)	[9，10]
频数	16	30	40	10	4

试利用该样本的频率分布估计总体的概率分布，并解决下列问题：（注：每组数据取区间的中点值）

（1）由频率分布表可认为，该产品的质量指标值k近似地服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均数$\bar{x}$，σ近似为样本的标准差s，并已求得$s\approx 0.82$. 记X表示某天从生产线上随机抽取的10件产品中质量指标值k在区间$(5.42,7.88]$之外的个数，求$P(X=1)$及X的数学期望(精确到0.001)；

（2）已知每个产品的质量指标值k与利润y(单位：万元)的关系如下表所示($t\in(6,7)$)：

质量指标值k	[5，6)	[6，7)	[7，8)	[8，9)	[9，10]
利润y	$5t$	$3t$	$2t$	t	$-5t^2$

假定该厂所生产的该产品都能销售出去，且这一年的总投资为500万元，问：该厂能否在一年之内通过销售该产品收回投资？试说明理由.

参考数据：若随机变量$Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<Z\leq\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<Z\leq\mu+3\sigma)=0.9973$，$0.8186^9\approx 0.1651$.

19.（本小题满分 12 分）

如图 4 甲，平面图形 $ABCDE$ 中，$AE=ED=DB=BC=1$，$CB\perp BD$，$ED/\!/AB$，$\angle EAB=60°$. 沿 BD 将 $\triangle BCD$ 折起，使点 C 到 F 的位置，如图乙，使 $BF\perp BE$，$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BF}$.

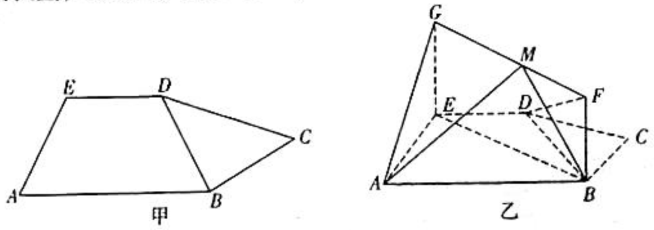

图 4

（1）求证：平面 $GEBF\perp$ 平面 AEG；

（2）点 M 是线段 FG 上的动点，当 GM 多长时，平面 MAB 与平面 AEG 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$？

20.（本小题满分 12 分）

如图 5，点 M 是圆 A：$x^2+(y+1)^2=16$ 上任意点，点 $B(0,1)$，线段 MB 的垂直平分线交半径 AM 于点 P，当点 M 在圆 A 上运动时，

（1）求点 P 的轨迹 E 的方程；

（2）$BQ/\!/x$ 轴，交轨迹 E 于 Q 点（Q 点在 y 轴的右侧），直线 l：$x=my+n$ 与 E 交于 C，D（l 不过 Q 点）两点，且 CQ 与 DQ 关于 BQ 对称，则直线 l 具备以下哪个性质？证明你的结论？

①直线 l 恒过定点；②m 为定值；③n 为定值.

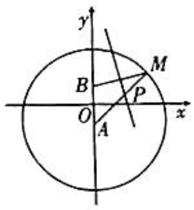

图 5

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=-ax^2+x\ln x+2$.

（1）若 $f(x)$ 有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=0$ 时，证明：$f(x)>x-\frac{2}{x}$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求曲线 C 的极坐标方程；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，$A(3,0)$，$B(0,3)$，M 点是曲线 C 上任意点，求 $\triangle ABM$ 面积的最大值，并求此时 M 的极径.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，函数 $f(x)=|x+a|-|b-x|+c$ 的最大值为 4.

（1）求 $a+b+c$ 的值；

（2）求 $\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{16}b^2+c^2$ 的最小值，并求此时 a，b，c 的值.

2022届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	B	C	C	B	D	B	A	B	D

【解析】

1. $\left.\begin{aligned}x^2+4x-12<0\\x+2\geqslant0\\\sqrt{x+2}<2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-6<x<2\\-2\leqslant x<2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x$ 为−2，−1，0，1，故选D.

2. $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3\mathrm{i}}{5}$，$\bar{z}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3\mathrm{i}}{5}$，故选C.

3. $\bar{x}=35$，$\bar{y}=11$，$\hat{a}=0.5$，$y=0.3x+0.5$，当 $x=120$，$y=36.5$（元），故选A.

4. ①对；②错；③错；④对，故选B.

5. $\mathrm{C}_{10}^3-\mathrm{C}_7^3=85$，故选C.

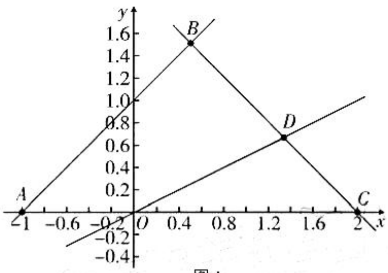

图1

6. 符合条件的为图1中阴影部分区域，$D\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，故根据几何概型事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{S_{\triangle ODC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{8}{27}$，故选C.

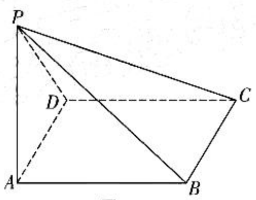

图2

7. 由三视图得其直观图如图2所示，则表面积为 $S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{正ABCD}=6+2\sqrt{5}$，故选B.

8. $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos(2\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$，故选D.

9．$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$C$，$P$，$M$ 三点共线，存在 λ，使

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$①，又 N，P，B 三点共线，存在实数 μ

使得 $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AN}+(1-\mu)\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(1-\mu)\overrightarrow{AB}$②，由①② $\left.\begin{array}{r}\lambda=\frac{1}{2}\mu\\(1-\lambda)\frac{3}{4}=1-\mu\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda$

$=\frac{1}{5}$，$\mu=\frac{2}{5}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$，故选 B．

10．如图 3，圆 G 的圆心为 $(0,\ -2)$，半径为 1，$F_1(-\sqrt{5},\ 0)$，

$|PQ|+|PF_2|=|PQ|+|PF_1|+2a\geqslant|PG|-1+|PF_1|+4$，当 P，

G，F_1 三点共线时，$|PQ|+|PF_2|$ 最小，最小值为

$|GF_1|+3=6$，故选 A．

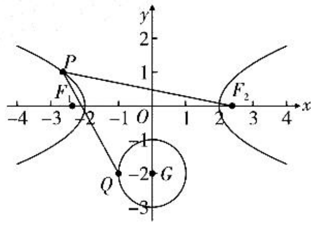

图 3

11．$f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{3\omega}\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 在 $(\pi,\ 2\pi)$ 内没有零点，满足 $\left.\begin{array}{r}2\pi-\pi\leqslant\frac{T}{2}\\\pi\geqslant\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\\2\pi\leqslant\dfrac{k\pi+\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\\\omega>0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}0<\omega\leqslant1\\\omega\geqslant k+\frac{1}{3}\\\omega\leqslant\frac{k}{2}+\frac{2}{3}\\k\in\mathbf{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{3}$，故选 B．

12．$a=(1+2)^{\frac{1}{2}}$，$b=(1+\mathrm{e})^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，$c=(1+3)^{\frac{1}{3}}$，令 $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)(x>0)$，$f'(x)=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$，

令 $g(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)-\ln(1+x)(x>0)$，$g'(x)=\frac{-x}{(x+1)^2}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，

$g(x)<g(0)=0$，$\therefore f'(x)<0$恒成立，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. $\because 2<\mathrm{e}<3$，

$\therefore f(2)>f(\mathrm{e})>f(3)$，即$\dfrac{1}{2}\ln(1+2)>\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(1+\mathrm{e})>\dfrac{1}{3}\ln(1+3)$，则$3^{\frac{1}{2}}>(1+\mathrm{e})^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>4^{\frac{1}{3}}$，即

$a>b>c$，故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	7	10	$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{9}$

【解析】

13．$\left.\begin{matrix}a_1=-7\\S_3=-15\end{matrix}\right\}\Rightarrow d=2$，$a_n=2n-9$，$\therefore a_8=2\times8-9=7$.

14．$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式的第$r+1$项为$T_{r+1}=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot x^{-r}=(-1)^rC_6^r\cdot x^{6-2r}$，当$6-2r=0$时，

$r=3$，此时$T_4=(-1)^3C_6^3=-20$，当$6-2r=-2$时，$r=4$，此时$T_5=(-1)^4C_6^4x^{-2}=15x^{-2}$，

$\therefore$常数项为$1\times(-20)+2\times15=10$.

15．因为x，y是正实数，且$x+y=2$，所以$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{x+y}{2x}+\dfrac{(x+y)^2}{4xy}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{4y}+\dfrac{y}{4x}+\dfrac{1}{2}$

$=1+\dfrac{3y}{4x}+\dfrac{x}{4y}\geqslant1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$时，等号成立.

16．如图 4，$\because a^2+b^2=c^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$，$\therefore a^2+b^2-c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin C$，

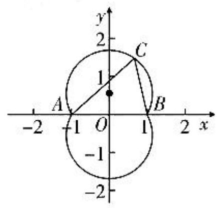

图 4

$\therefore \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C$，$\therefore \tan C=\sqrt{3}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$，又：$c=AB=2$，

$\therefore\triangle ABC$外接圆半径为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$点C的轨迹长度为$2\times\dfrac{4\pi}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}\pi$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=a_n$，

则 $S_n=a_{n+1}$，

两式相减，$a_n=a_{n+1}-a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$， ……………………………………（2 分）

$\because a_1=1$，$S_1=a_2=1$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 从第二项起构成公比为 2，首项为 1 的等比数列，

$\therefore n\geqslant 2$，$a_n=2^{n-2}$， ……………………………………（4 分）

$a_1=1$，不满足上式，

$\therefore a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2^{n-2}, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ……………………………………（6 分）

（2）因为 $n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n+1\geqslant 2$，$\therefore c_n=2^{n-1}+2n$，

$T_n=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(2+4+6+\cdots+2n)$ ……………………………………（9 分）

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}+n(n+1)=2^n-1+n(n+1)$. ……………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意知样本的平均数为

$\overline{x}=5.5\times 0.16+6.5\times 0.3+7.5\times 0.4+8.5\times 0.1+9.5\times 0.04=7.06$，

所以 $(\mu-2\sigma,\ \mu+\sigma]=(7.06-1.64,\ 7.06+0.82]=(5.42,\ 7.88]$，

而 $P(\mu-2\sigma<k\leqslant\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}P(\mu-\sigma<k\leqslant\mu+\sigma)+\dfrac{1}{2}P(\mu-2\sigma<k\leqslant\mu+2\sigma)=0.8186.$

所以质量指标 k 在区间 $(5.42,\ 7.88]$ 之外的概率为 0.1814.

……………………………………（4 分）

因为 $X \sim B(10,\ 0.1814)$，

则 $P(X=1)=C_{10}^{1}0.8186^{9}\times 0.1814 \approx 10\times 0.1651\times 0.1814 \approx 0.299$，

$E(X)=10\times 0.1814=1.814$. ……………………………………………（6 分）

（2）由题意知，每个产品的平均利润

$y=5t\times 0.16+3t\times 0.3+2t\times 0.4+t\times 0.1+(-5t^{2})\times 0.04=-0.2t^{2}+2.6t$， $t\in(6,\ 7)$，

……………………………………………………………（8 分）

则 $y'=2.6-0.4t$，

令 $y'=0$，得 $t=6.5$，

故当 $t\in(6,\ 6.5)$ 时，$y'>0$， 当 $t\in(6.5,\ 7)$ 时，$y'<0$，

所以当 $t=6.5$ 时，y 取得最大值， ……………………………………………（10 分）

$y_{\max}=-0.2\times 6.5^{2}+2.6\times 6.5\approx 8.45$.

因为该生产线的年产量为 100 万个，

所以该生产线的年盈利的最大值为 $8.45\times 100=845$(万元)，且 845 万元>500 万元，

所以该厂能在一年之内通过销售该产品收回投资. ……………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：∵ $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BF}$.

∴ $EG\,/\!/\,BF$，且 $EG=BF$.

∵ $BF\perp BE$，$BF\perp BD$，$BE\cap BD=B$，

∴ $BF\perp$ 平面 $ABDE$，

∴ $EG\perp$ 平面 $ABDE$，四边形 $BFGE$ 为矩形.

∴ $EG\perp EB$， ……………………………………………（3 分）

$\because \angle EAB = 60°$， $AE = ED = DB = 1$，$ED//AB$，

$\therefore \angle EBA = 30°$，则 $\angle AEB = 90°$，$\therefore AE \perp BE$， $AE \cap EG = E$，

$\therefore BE \perp$ 平面AEG，$\because BE \subset$ 平面$GEBF$，

$\therefore$ 平面$GEBF \perp$ 平面AEG. ……………………………………………（6 分）

（2）解：由（1）可知，EA，EB，EG 两两垂直，建立如图 5 空间直角坐标系 $E-xyz$，

$\because AE = ED = DB = BF = 1$，$BE = FG = \sqrt{3}$，

$\therefore A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$G(0,\ 0,\ 1)$，

设 $GM = \lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{3})$，则$M(0,\ \lambda,\ 1)$、$\overrightarrow{AM} = (-1,\ \lambda,\ 1)$，$\overrightarrow{AB} = (-1,\ \sqrt{3},\ 0)$，

设平面MAB的一条法向量为$\vec{m} = (x,\ y,\ z)$，

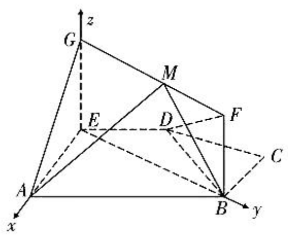

图 5

$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + \lambda y + z = 0, \\ -x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$ 令$y = 1$，则$x = \sqrt{3}$，$z = \sqrt{3} - \lambda$，

$\therefore \vec{m} = (\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3} - \lambda)$， ……………………………（8 分）

平面 AEG 的一条法向量 $\vec{n} = (0,\ 1,\ 0)$，

$|\cos\langle \vec{m},\ \vec{n} \rangle| = \dfrac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{4 + (\sqrt{3} - \lambda)^2}}(0 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{3})$，

设平面MAB与平面AEG所成锐二面角为θ，

则 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4 + (\sqrt{3} - \lambda)^2}}$，$0 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{3}$， ……………………………………………（10 分）

由题意，$\dfrac{1}{\sqrt{4 + (\sqrt{3} - \lambda)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，解得 $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故当 $GM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，平面 MAB 与平面 AEG 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

……………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）如图 6，由$\odot A$方程，得$A(0,\ -1)$，半径$r=4$，

$\because P$在BM的垂直平分线上，$\therefore PM=PB$，

则$|PA|+|PB|=|PA|+|PM|=|AM|=4>|AB|=2$，

$\therefore P$的轨迹E是以A，B为焦点，长轴长为 4 的椭圆，

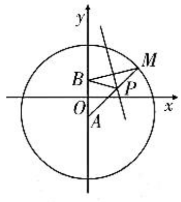
图 6

由$2a=4$，则$a=2$，$c=1$，$b^2=3$，

$\therefore$点P的轨迹E的方程为$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$． ……………………………………………（6 分）

（2）$\because$直线l与轨迹E交于C，D两点，设$C(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，如图 7，

$\begin{cases} x=my+n, \\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1 \end{cases}$ 消x，得$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(my+n)^2}{3}=1$，

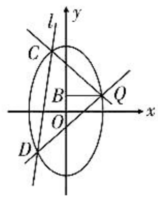
图 7

整理，得$(3+4m^2)y^2+8mny+4n^2-12=0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{8mn}{3+4m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{4n^2-12}{3+4m^2}$， ……………………………………（8 分）

由题意得：$k_{CQ}+k_{DQ}=0$，$Q\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$，$x_1\neq\dfrac{3}{2}$，$x_2\neq\dfrac{3}{2}$，

$\dfrac{y_1-1}{x_1-\dfrac{3}{2}}+\dfrac{y_2-1}{x_2-\dfrac{3}{2}}=0$，即$(y_1-1)\left(x_2-\dfrac{3}{2}\right)+(y_2-1)\left(x_1-\dfrac{3}{2}\right)=0$，

$\because x_1=my_1+n$，$x_2=my_2+n$，

$\therefore$整理：$2my_1y_2+\left(n-m-\dfrac{3}{2}\right)(y_1+y_2)-2n+3=0$，

$2m\dfrac{4n^2-12}{3+4m^2}+\left(n-m-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{8mn}{3+4m^2}\right)-2n+3=0$，

即$4m^2+(4n-8)m-2n+3=0$，

即 $(2m-1)(2m+2n-3)=0$， ……………………………………（10 分）

若 $2m+2n-3=0$，则 C， D， Q 三点共线，不合题意，

$\therefore 2m-1=0$，即 $m=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 直线 l 中 m 为定值 $\dfrac{1}{2}$． ……………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\ln x-2ax+1$，

由题意 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两解，

即 $\ln x-2ax+1=0$，即 $2a=\dfrac{\ln x+1}{x}$ 有两解．

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}(x>0)$，即 $g(x)$ 的图象与直线 $y=2a$ 有两个交点．

……………………………………（2 分）

$g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$， ……………………………………（4 分）

$x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$；

$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，

$\therefore 0<2a<1$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a$的取值范围是$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$. ……………………………………………（6 分）

（2）证明：当$a=0$时，$f(x)=x\ln x+2$，

即证$x\ln x+2>x-\dfrac{2}{x}$，

即证$x\ln x+2-x+\dfrac{2}{x}>0$，

令$h(x)=x\ln x+2-x+\dfrac{2}{x}(x>0)$，

$h'(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}$，

令$m(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}$，则$m'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$，

当$x>0$时，$m'(x)>0$，$\therefore h'(x)$在$(0,\ +\infty)$递增.

$h'(1)=-2<0$，$h'(\mathrm{e})=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}>0$，

$\therefore$存在唯一的$x_0\in(1,\ \mathrm{e})$，使得$h'(x_0)=\ln x_0-\dfrac{2}{x_0^2}=0$，

……………………………………………………………（9 分）

当$x_0\in(0,\ x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减；

当$x\in(x_0,\ +\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)$.

又$\because x_0\in(1,\ \mathrm{e})$，$h'(x_0)=0$，$\therefore \ln x_0-\dfrac{2}{x_0^2}=0$，

$\therefore h(x_0)=x_0\ln x_0+2-x_0+\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{2}{x_0}+2-x_0+\dfrac{2}{x_0}=2-x_0+\dfrac{4}{x_0}>2-\mathrm{e}+\dfrac{4}{\mathrm{e}}>0$，

$\therefore h(x)>0$，$\therefore f(x)>x-\dfrac{2}{x}$. ……………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）化为普通方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

……………………………………………………（2 分）

$\because \begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程：$\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=3$，即 $\rho^2=\dfrac{3}{1+2\sin^2\theta}$.

……………………………………………………（5 分）

（2）设 $M(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，

$|AB|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

直线 AB 方程为 $x+y-3=0$，

M 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|2\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)-3\right|}{\sqrt{2}}$，

$S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{3}{2}\left|2\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)-3\right|$， ……………………………（8 分）

当 $\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$，即 $\varphi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$，即 $\varphi=\dfrac{7}{6}\pi$ 时，$S_{\triangle ABM}$ 取得最大值 $\dfrac{15}{2}$，

此时$M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则$M$的极径$\rho=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

……………………………………………………………………（10分）

23.（本小题满分10分）【选修4−5：不等式选讲】

解：（1）∵$a>0$，$b>0$，$c>0$，

$f(x)=|x+a|-|b-x|+c\leqslant|x+a+b-x|+c=a+b+c$，

∴$a+b+c=4$.　　　　　　……………………………………………………（5分）

（2）由（1）$a+b+c=4$，根据柯西不等式，有

$$\left(\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{16}b^2+c^2\right)(5^2+4^2+1)\geqslant\left(\frac{1}{5}a\times5+\frac{1}{4}b\times4+c\times1\right)^2=(a+b+c)^2=16,$$

∴$\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{16}b^2+c^2\geqslant\frac{8}{21}$，　　　　………………………………………（8分）

当且仅当$\frac{\frac{1}{5}a}{5}=\frac{\frac{1}{4}b}{4}=\frac{c}{1}$，即$a=\frac{50}{21}$，$b=\frac{32}{21}$，$c=\frac{2}{21}$时，

$\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{16}b^2+c^2$取得最小值$\frac{8}{21}$.　　　　…………………………………………（10分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。