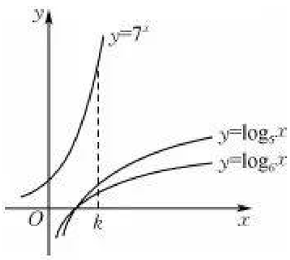
高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$z=2i-\frac{1-i}{1+i}=2i-\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=2i-\frac{-2i}{2}=3i$，则$|z|=3$. 故选 C.

2. C　$M=\{x|x^2-x-2<0\}=(-1,2)$，$N=\{x|y=\sqrt{1-\ln x}\}=(0,e]$，则$M\cup N=(-1,e]$. 故选 C.

3. A　因为$b=\sqrt{ac}$，则$b^2=ac$，且$b\neq0$，所以a,b,c成等比数列；若a,b,c成等比数列，则$b^2=ac$. 所以“$b=\sqrt{ac}$”是“a,b,c成等比数列”的充分不必要条件. 故选 A. 来源：高三答案公众号

4. B　设$5^x=6^y=\log_7 z=k>1$，则$x=\log_5 k$，$y=\log_6 k$，$z=7^k$，在同一坐标系中作出$y=\log_5 x$，$y=\log_6 x$，$y=7^x$的图象，如图所示，



易得$7^k>\log_5 k>\log_6 k$，即$z>x>y$. 故选 B.

5. D　由题意，可分为两种情况：(1)小胡单独一个人旅游，在重庆，成都中任选 1 个，有 2 种选法，再将其他 3 人分成两组，对应剩下的 2 个地方，有$C_3^2A_2^2=6$种情况，所以此时共有$2\times6=12$种；(2)小胡和小张、小陈、小常中的 1 人一起旅游，先在小张、小陈、小常中任选 1 人，与小胡一起在重庆，成都中任选 1 个，有$C_3^1C_2^1=6$种情况，将剩下的 2 人全排列，对应剩下的 2 个地方，有$A_2^2=2$种情况，所以此时共有$6\times2=12$种. 综上，不同的旅游方案共有$12+12=24$种. 故选 D.

6. A　设点$P(t,-1)$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，对函数$y=\frac{x^2}{4}$求导得$y'=\frac{x}{2}$，所以直线PA的方程为$y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即$y-y_1=\frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{2}$，即$y=\frac{x_1x}{2}-y_1$，同理可知，直线$PB$的方程为$y=\frac{x_2x}{2}-y_2$. 由于点$P$为直线$PA$、$PB$的公共点，则$\begin{cases}tx_1-2y_1+2=0,\\tx_2-2y_2+2=0,\end{cases}$所以点$A,B$的坐标满足方程$tx-2y+2=0$，所以直线$AB$的方程为$tx-2y+2=0$，所以直线$AB$恒过定点$(0,1)$，点$M$到直线$AB$的距离的最大值$d=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

7. D　取B_1C_1的中点为M，连接EM，MD_1，则$EM/\!/BC_1$，且$EM=\frac{1}{2}BC_1$，则$EM/\!/AD_1$. 又正方体中，$AB=2$，所以$MD_1=AE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$BC_1=AD_1=2\sqrt{2}$，因此$EM=\frac{1}{2}BC_1=\sqrt{2}$，所以平面$AED_1$截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面为等腰梯形$EMD_1A$，因此该等腰梯形的高为$h=\sqrt{D_1M^2-\left(\frac{AD_1-EM}{2}\right)^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以该截面的面积为$S=\frac{1}{2}\cdot(AD_1+EM)\cdot h=\frac{9}{2}$. 故选 D.

8. B　令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令$u(x)=x\cos x-\sin x$，则$u'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，所以$u(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，所以$u(x)<u(0)=0$，所以$f'(x)<0$在

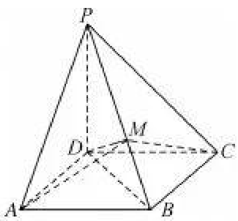
$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,所以 $f(1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,即$\frac{\sin 1}{1}>\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$,即$\frac{\sin 1}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. 令 $g(x)=\sin x+x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,易得 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以 $g(1)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$,即 $\sin 1+1<\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$,即 $\sin 1<\frac{\pi}{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}$,所以$\frac{\sin 1}{3}<\frac{\pi}{9}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}$,所以 $c>a>b$. 故选 B.

9. BC　由图象可得 $A=2,T=\pi,g\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2$,所以 $\omega=2,-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,由$|\varphi|<\pi$,即 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$,得 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,将 $g(x)$的图象上的所有点的横坐标变为原来的$\frac{2}{3}$倍,再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $f(x)$的图象,即 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,所以 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$,当 $x=\frac{\pi}{9}$时,$f(x)$取最大值,所以 $f(x)$的图象关于 $x=\frac{\pi}{9}$对称,当 $x\in\left[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{3}\right]$时,$3x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$单调递减. 故选 BC.

10. ABD　由不等式的基本性质,可得 A 和 B 都正确;取 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$,则 $a+b=\frac{3}{4}\in(0,1)$,从而$\left(\frac{3}{4}\right)^c<\left(\frac{3}{4}\right)^d$,则 C 错误;考查幂函数 $y=x^{a+b}$,在$(0,+\infty)$上是增函数,则由 $c>d>0$,即得 $c^{a+b}>d^{a+b}$,则 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD　设 $P(x,y)$,则$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{3}{2}$,即$[(x+1)^2+y^2][(x-1)^2+y^2]=\frac{9}{4}$,以$-x$替换 x,$-y$替换 y 方程不变,所以曲线 C 关于坐标轴对称,故 A 正确;$\triangle F_1PF_2$ 的周长 $C_{\triangle F_1PF_2}=|F_1P|+|PF_2|+|F_1F_2|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+2\geqslant 2\sqrt{\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}}+2=\sqrt{6}+2$,当且仅当$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$时等号成立,故 B 正确;$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|F_1P|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1P||PF_2|}=\frac{|F_1P|^2+|PF_2|^2-4}{3}\geqslant\frac{2|F_1P||PF_2|-4}{3}=-\frac{1}{3}$,当且仅当$|F_1P|=|PF_2|$时,等号成立. 所以当$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$时,$\sin\angle F_1PF_2$ 取得最大值,所以$\triangle F_1PF_2$ 的最大面积为 $S=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$,故 C 错误;由$[(x+1)^2+y^2][(x-1)^2+y^2]=\frac{9}{4}\leqslant\left[\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2}{2}\right]^2=(x^2+y^2+1)^2$,即 $x^2+y^2+1\geqslant\frac{3}{2}$,即 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,当且仅当$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$时等号成立,故 D 正确. 故选 ABD.

12. AD　把平面图形还原得到原四棱锥,如图,由 $ED\perp DC,FD\perp DA$,可知 $PD\perp DC,PD\perp DA$,$DC\cap DA=D$,所以 $PD\perp$平面 $ABCD$. 在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中,$\angle PAD=30°,DA=3$,故 $PD=3\tan 30°=\sqrt{3}$,在 $\text{Rt}\triangle CDP$ 中,$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$,在矩形 $ABCD$ 中,$DA=3,DC=2$,$DB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,连接 DB,在 $\text{Rt}\triangle PDB$ 中,$PB=\sqrt{PD^2+DB^2}=\sqrt{3+13}=4$. 对于 A,



将平面 PAB 与平面 PBC 展开成一个平面,当 A,M,C 三点共线时,$AM+CM$ 最小,此时,A,P,B,C 四点共圆,且直径为 $PB=4$,而$\sin\angle APC=\sin(\angle APB+\angle CPB)=\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$,所以 $AC=4\times\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{2}$,故 A 正确;对于 B,假设 $DM\perp BC$,易证 $BC\perp$平面 PBD,则有 $BC\perp BD$,与已知条件矛盾,故 B 错误;对于 C,将此四棱锥可以补形成一个长方体,PB 为长方体的一条对角线,同时也是四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的直径,所以半径 $R=2$,其体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$,故 C 错误;对于 D,因为$\frac{V_{M\text{-}PAD}}{V_{B\text{-}PAD}}=\frac{MP}{BP},\frac{V_{M\text{-}PCD}}{V_{B\text{-}PCD}}=\frac{MP}{BP}$,而 $V_{B\text{-}PAD}=V_{P\text{-}BAD}=V_{P\text{-}BCD}=V_{B\text{-}PCD}$,所以 $V_{M\text{-}PAD}=V_{M\text{-}PCD}$,故

D 正确. 故选 AD.

13. $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$　设切点为 $A(x_0,4x_0+ax_0^2)$，直线 AP 的斜率为 k，又 $f'(x)=4+2ax$，则 $k=f'(x_0)=4+2ax_0$，所以切线方程为 $y-(4x_0+ax_0^2)=(4+2ax_0)(x-x_0)$. 将 $(1,1)$ 代入化简得 $ax_0^2-2ax_0-3=0$，所以方程 $ax_0^2-2ax_0-3=0$ 有两个不同的实数解，所以 $a\neq0$，且 $\Delta=(-2a)^2-4a(-3)=4a^2+12a>0$，所以 $a>0$ 或 $a<-3$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$. 来源：高三答案公众号

14. $-\frac{4}{3}$　因为 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2}$，所以

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}.$$

15. -1　由题意知，$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=2\times2\times\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times2^2=-1.$

16. 4　由题意知 X 的可能取值是 0，2，3，4，5，$P(X=0)=\frac{1}{A_5^5}=\frac{1}{120}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2}{A_5^5}=\frac{1}{12}$，$P(X=3)=\frac{2C_5^3}{A_5^5}=\frac{1}{6}$，$P(X=4)=\frac{9C_5^4}{A_5^5}=\frac{3}{8}$，$P(X=5)=\frac{11C_4^1}{A_5^5}=\frac{11}{30}$，所以 $E(X)=0\times\frac{1}{120}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{11}{30}=4.$

17. 解：(1)因为 $\sin A+\sin B-\sin C=\frac{b\sin A}{2}$，由正弦定理可得 $a+b-c=\frac{ab}{2}$. ………… 2 分

又由 $a+b+c=6$，可得 $(a+b-c)(a+b+c)=3ab$. ………… 3 分

整理得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$. ………… 4 分

又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2)因为 D 是边 AB 的中点，所以 $2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，即 $4\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2=b^2+a^2+ab=4\times(\sqrt{3})^2=12.$ ………… 7 分

又 $a+b+c=6$，$a^2+b^2-c^2=ab$，解得 $a=b=c=2$. ………… 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$. ………… 10 分

18. 解：(1)因为成绩在 $[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$ 之间的人数依次构成等差数列，

所以 a，b，0.02 依次构成等差数列，

所以 $2b=a+0.02$. ………… 1 分

又 $(0.005+a+b+0.02+0.005)\times10=1$，所以 $a+b=0.07$， ………… 2 分

联立 $\begin{cases}2b=a+0.02,\\a+b=0.07,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.04,\\b=0.03.\end{cases}$ ………… 4 分

(2)设这 400 名学生物理成绩的中位数为 x_0，则 $x_0\in[70,80]$. ………… 5 分

由 $(0.005+0.04)\times10+0.03\times(x_0-70)=0.5$，

解得 $x_0\approx72$.

即这 400 名学生物理成绩的中位数为 72. ………… 7 分

(3)先求这 400 名学生物理成绩在 $[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 的人数依次为

$400\times0.005\times10=20$，$400\times0.04\times10=160$，$400\times0.03\times10=120$，$400\times0.02\times10=80$，$400\times0.005\times10=20$，
…… 9 分

则这 400 名学生化学成绩在$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$的人数依次为 15，162，80，100，20.
…… 11 分

所以化学成绩低于 50 分的人数为 $400-15-162-80-100-20=23$. ……………………………………… 12 分

19.(1)解：因为$(S_n+1)a_{n+1}+S_n^2=0$，所以$(S_n+1)(S_{n+1}-S_n)+S_n^2=0$，

整理得 $S_{n+1}S_n+S_{n+1}-S_n=0$，…………………………………………………………………… 1 分

等式两边同除以 $S_{n+1}S_n$，得 $1+\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=0$，即$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=1$. ………………………………………… 3 分

因为 $a_1=1$，所以$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$，…………………………………………………………………… 4 分

所以数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

所以$\frac{1}{S_n}=1+n-1=n$，所以 $S_n=\frac{1}{n}$. ……………………………………………………………… 5 分

所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}=-\frac{1}{n(n-1)}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\-\frac{1}{n(n-1)},n\geqslant2.\end{cases}$ ………………………………………………… 6 分

(2)证明：因为 $b_{n+1}-b_n=(n-2)\cdot2^na_n$，

所以当 $n=1$ 时，$b_2-b_1=(1-2)\times2^1\times1=-2$.

当 $n\geqslant2$ 时，$b_{n+1}-b_n=-\frac{(n-2)\cdot2^n}{n(n-1)}=-\frac{(n-1)\cdot2^{n+1}-n\cdot2^n}{n(n-1)}=\frac{2^n}{n-1}-\frac{2^{n+1}}{n}$.

所以当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=b_n-b_{n-1}+b_{n-1}-b_{n-2}+\cdots+b_3-b_2+b_2-b_1+b_1$

$=\frac{2^{n-1}}{n-2}-\frac{2^n}{n-1}+\frac{2^{n-2}}{n-3}-\frac{2^{n-1}}{n-2}+\cdots+\frac{2^2}{2-1}-\frac{2^3}{2}+(-2)+1=\frac{2^2}{2-1}-\frac{2^n}{n-1}-1=3-\frac{2^n}{n-1}$.

所以 $b_n=\begin{cases}1,n=1,\\3-\frac{2^n}{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$ …………………………………………………………………… 7 分

又 $n\geqslant2$ 时，$b_n=3-\frac{2^n}{n-1}<3-\frac{2^n}{n}$，且 $b_1=1=3-\frac{2^1}{1}$，…………………………………………… 9 分

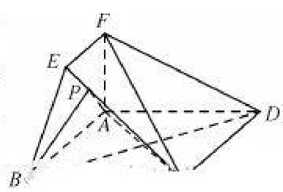
所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_n\leqslant3-\frac{2^n}{n}$. ………………………………………………………………… 10 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant3-\frac{2^1}{1}+3-\frac{2^2}{2}+\cdots+3-\frac{2^n}{n}=3n-\left(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)\leqslant3n-\left(\frac{2^1}{n}+\frac{2^2}{n}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)=$

$\frac{3n^2-2^{n+1}+2}{n}$，…………………………………………………………………………………………… 11 分

故 $T_n\leqslant\frac{3n^2-2^{n+1}+2}{n}$，当且仅当 $n=1$ 时等号成立. ……………………………………………… 12 分

20.(1)证明：如图，连接 AC，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$. ………………… 1 分



因为$\angle BAF=90°$，所以 $BA\perp AF$，又平面 $ABEF\perp$平面 $ABCD$，平面 $ABEF\cap$平面 $ABCD$ $=AB$，$AF\subset$平面 $ABEF$，所以 $AF\perp$平面 $ABCD$. …………………………………… 3 分

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AF\perp BD$. …………………………………………………… 4 分

又 $AF\cap AC=A$，AF，$AC\subset$平面 AFC，所以 $BD\perp$平面 AFC. …… 5分

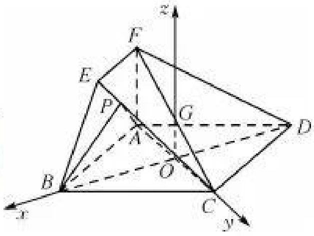
又 $FC\subset$平面 AFC，所以 $BD\perp FC$. …… 6分

(2)解：连接 AC，交 BD 于点 O，取 FC 的中点 G，连接 OG.

在$\triangle CAF$中，O，G 分别是 AC，FC 的中点，所以 $OG/\!/AF$.

由(1)知 $AF\perp$平面 $ABCD$，又 AC，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AF\perp AC$，$AF\perp BD$，

又 $OG/\!/AF$，所以 $OG\perp AC$，$OG\perp BD$. …… 7分



以 O 为原点，以 OB，OC，OG 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$F(0,-1,1)$，所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,0,1)$，

所以平面 DAB 的一个法向量是$\overrightarrow{AF}=(0,0,1)$. …… 8分

设 $E(a,b,c)$，则$\overrightarrow{FE}=(a,b+1,c-1)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\sqrt{3},1,0)$，

解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=1$，

即 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，所以$\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-1\right)$.

设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,-\lambda\right)(\lambda\in(0,1))$，所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,-\lambda\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda,1-\lambda\right)$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)x_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda\right)y_1+(1-\lambda)z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，解得 $y_1=-\sqrt{3}$，$z_1=\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}\right)$. …… 9分

所以$\left|\cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{\left|\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}\right|}{1\times\sqrt{4+\left(\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$， …… 10分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=-1$(舍). …… 11分

所以存在点 P，使得二面角 $P-AB-D$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，此时$\frac{EP}{PC}=\frac{1}{2}$. …… 12分

21. (1)解：因为$|A_1A_2|=4$，所以 $2a=4$，解得 $a=2$. …… 1分

因为 C 过点$\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，所以$\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{b^2}=1$， …… 2分

解得 $b=\sqrt{3}$. …… 3分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)证明：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以 $l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. …… 6分

由$\begin{cases} y=k(x-4), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 整理得$(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,

则$\Delta=(-32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$,解得$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$且$k\neq0$,$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$,

$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. …………………………………………………………………………………… 8分

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$ 得 $x=\dfrac{\dfrac{2y_2}{x_2-2}+\dfrac{2y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{y_1}{x_1+2}}=\dfrac{2k(x_2-4)(x_1+2)+2k(x_1-4)(x_2-2)}{k(x_2-4)(x_1+2)-k(x_1-4)(x_2-2)}=\dfrac{2x_1x_2-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}$

$=\dfrac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)-4x_1}{3(x_1+x_2)-8-4x_1}=\dfrac{2\times\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}-2\times\dfrac{32k^2}{3+4k^2}-4x_1}{3\times\dfrac{32k^2}{3+4k^2}-8-4x_1}=1$, ………………………………………… 10分

所以G在定直线$x=1$上. …………………………………………………………………………………… 12分

22.(1)解:由题意知$f'(x)=e^x-x-a$,$x\in[0,+\infty)$,令$u(x)=f'(x)$,则$u'(x)=e^x-1$,则$u'(x)\geqslant0$在$[0,+\infty)$上恒成立,所以$u(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,即$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. ……………………………… 1分

当$a\leqslant1$时,$f'(x)\geqslant f'(0)=1-a\geqslant0$在$[0,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)\geqslant f(0)=0$,符合题意; …………………………………………………………………………………… 3分

当$a>1$时,$f'(0)=1-a<0$.

令$h(x)=e^x-2x$,则$h'(x)=e^x-2$,所以$h(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减,在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增,所以$h(x)\geqslant h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$.

所以$f'(a)=e^a-a-a=e^a-2a>0$,又$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$\exists x_0\in(0,a)$,使得$f'(x_0)=0$,所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x_0)<f(0)=0$,不符合题意.

……… 5分

综上所述,实数a的取值范围是$(-\infty,1]$. ……………………………………………………………… 6分

(2)证明:由(1)得,当$a=1$,$x>0$时,$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$,即$e^x-\frac{x^2}{2}+1>x+2$. ……………………………… 7分

要证不等式$\left(e^x-\frac{1}{2}x^2+1\right)\ln(x+1)>2x$,只需证明$e^x-\frac{1}{2}x^2+1>\frac{2x}{\ln(x+1)}$,只需证明$x+2>\frac{2x}{\ln(x+1)}$,

即只需证$\ln(x+1)>\frac{2x}{2+x}$, …………………………………………………………………………… 10分

设$F(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$,则$F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$,

当$x>0$时,$F'(x)>0$恒成立,故$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又$F(0)=0$,所以$F(x)>0$恒成立. 所以原不等式成立. ………………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。