金华十校 2023 年 4 月高三模拟考试

数学卷评分标准与参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	C	C	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	ACD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.1．　　14．椭圆　　15．$[0,2e^3]$　　16．$\frac{1}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：(Ⅰ) $a_1+3d=3, 10a_1+45d=55, a_n=n$. ……………………………… 2 分

$\log_2 b_1+\log_2 b_2+\cdots+\log_2 b_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，①

则当 $n\geqslant 2$ 时，$\log_2 b_1+\log_2 b_2+\cdots+\log_2 b_{n-1}=\dfrac{(n-1)n}{2}$ ②……………………… 3 分

①−②得：$\log_2 b_n=n$,则 $b_n=2^n$

而当 $n\geqslant 1$ 时，$\log_2 b_1=1$，则 b_1=2，满足上式.

所以 $b_n=2^n$. ……………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)记 $c_n=(-1)^n n\cdot 2^n=n(-2)^n$ ……………………………………… 6 分

$T_n=(-2)^1+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\ldots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$

$-2T_2=(-2)^2+2\cdot(-2)^3+\ldots+(n-1)(-2)^n+n(-2)^{n+1}$

$3T_n=(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^n-n(-2)^{n+1}$

$T_n=\dfrac{-2-(3n+1)(-2)^{n+1}}{9}$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(Ⅰ) $S=\dfrac{ac}{4}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，$\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}$. ………………………………… 2 分

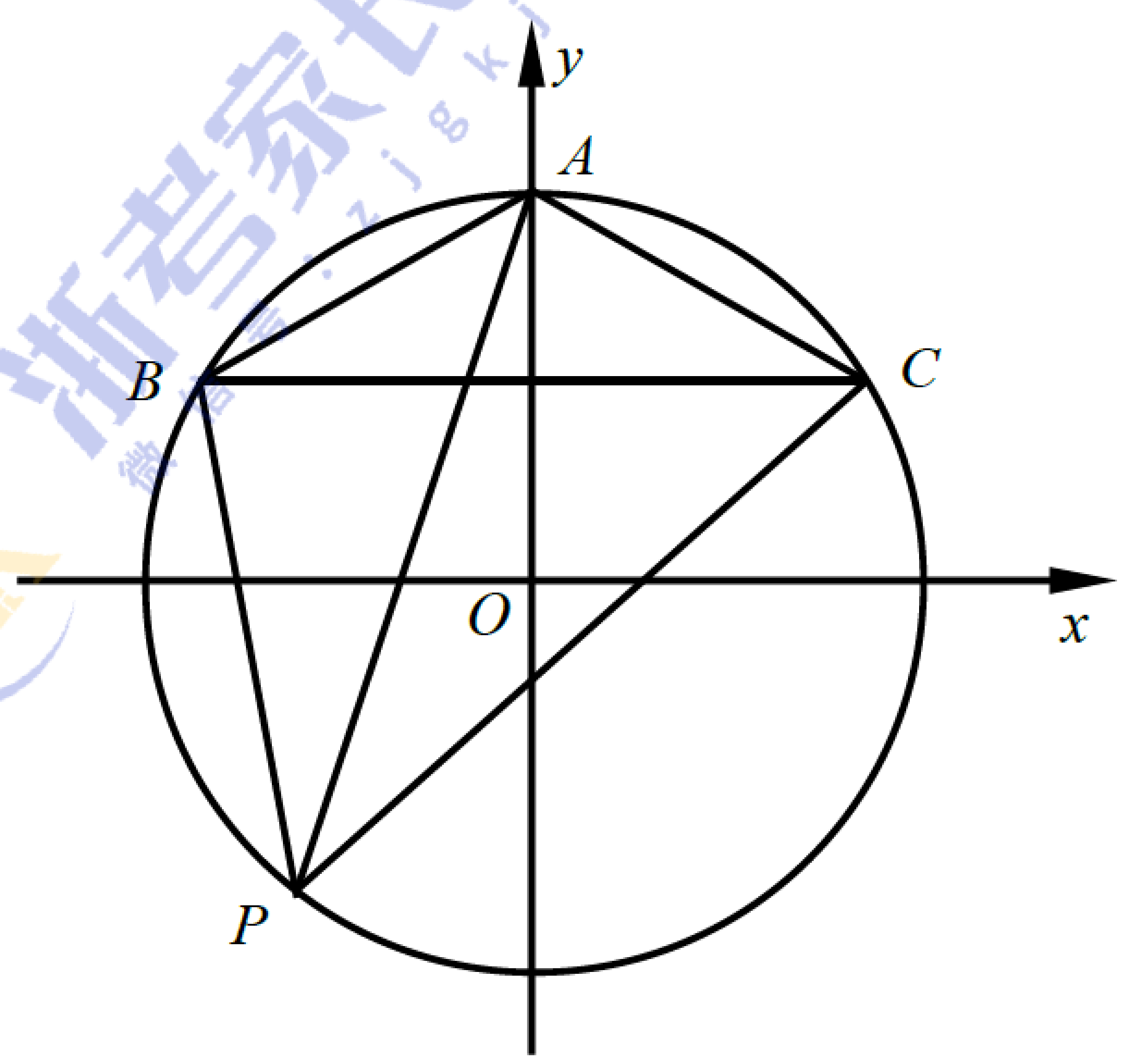
则 $4(\sin^2 B-\sin^2 A)=(b-\sqrt{3}a)\sin B=(4\sin^2 B-4\sqrt{3}\sin A\sin B)$. ……………… 4 分

解得 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，因此 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… 6 分

(Ⅱ)若 A 为钝角，则 A=120°，则 B=30°, C=30°.如图建立平面直角坐标系，

则 $A(0,2),B(-\sqrt{3},1),C(\sqrt{3},1)$，

设 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$. ……………………… 8 分



则 $\overrightarrow{PA}=(-2\cos\theta,2-2\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{3}-2\cos\theta,1-2\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3}-2\cos\theta,1-2\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=6-6\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=6-6\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=2-4\sin\theta$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=14-16\sin\theta\in[-2,30]$. ………………………… 12 分

19. 解：(Ⅰ)取 AB 中点 M，连 O_1M，O_1C，

则△ABC 的高 $h\leqslant O_1M+O_1C=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………… 3 分

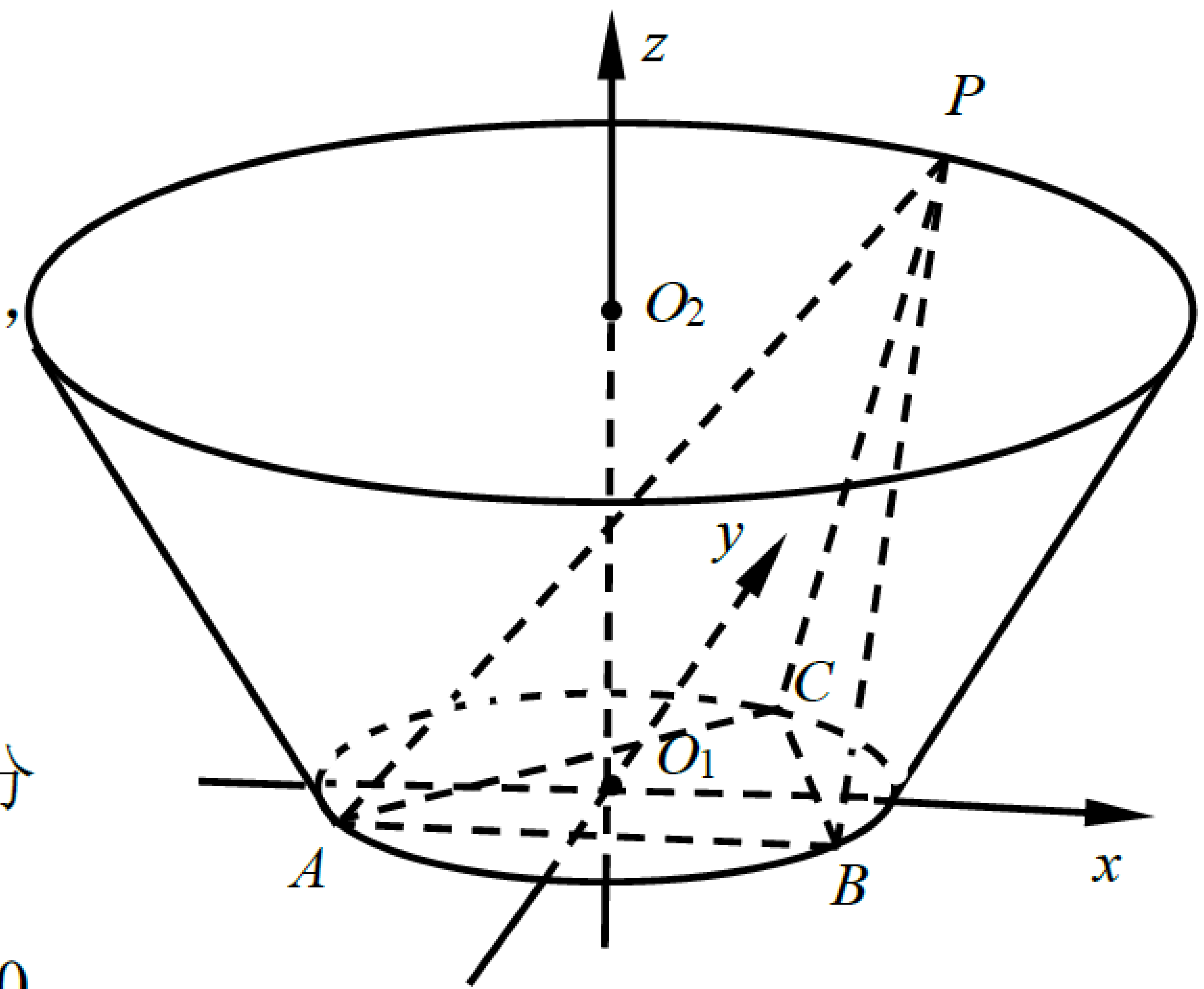
$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot O_1O_2\leqslant\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3}{4}$. ………………………… 5 分

(Ⅱ)如图，以 O_1 为坐标原点，过 O_1 与 AB 平行的直线为 x 轴，O_1O_2 为 z 轴.

建立空间直角坐标系，设 $C(x_0,y_0,0)$，$P(2x_0,2y_0,\sqrt{3})$，……………………… 7 分

$\because A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$

$PA=\sqrt{(2x_0+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(2y_0+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$,



又 $x_0^2+y_0^2=1$，解得 $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2},y_0=\frac{1}{2}$，

则 $P(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.…………………………… 9 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 解得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$，

同理 $\boldsymbol{n}_2=(-2,0,1)$. ……………………………………………………………… 11 分

设平面 PAC 与平面 PBC 的夹角为θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………… 12 分

20. 解：（Ⅰ）因为 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2=385-302.5=82.5$，…………………………… 2 分

根据参考数据，所以相关系数 $r=\frac{301.4-308.4}{\sqrt{82.5}\times\sqrt{0.95}}=-0.79$，即 $|r|=0.79>0.75$，

所以线性相关程度很高，可用直线拟合. ………………………………………… 3 分

由 $\hat{b}=\frac{301.4-308.4}{82.5}=-0.08$，………………………………………………… 4 分

所以 $a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=5.61-(-0.08)\times5.5=6.05$，

即 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=6.05-0.08x$. ………………………………… 6 分

（Ⅱ）设甲、乙两人需要排队的总时间为ξ，则ξ的可能取值为 40,60,80，………… 7 分

$P(\xi=40)=p(2p-1)=2p^2-p$，

$P(\xi=60)=(1-p)(2p-1)+p(1-(2p-1))=-4p^2+5p-1$，

$P(\xi=80)=(1-p)(1-(2p-1))=2p^2-4p+2$，

所以ξ的分布列为：

ξ	40	60	80
P	$2p^2-p$	$-4p^2+5p-1$	$2p^2-4p+2$

………… 10 分

因此 $E(\xi)=-60p+100\leqslant60$，可得 $p\geqslant\frac{2}{3}$，又 $\frac{1}{2}<p<1$，

故实数 p 的取值范围为 $\frac{2}{3}\leqslant p<1$. ………………………………………… 12 分

21．解：由已知条件得：$A(-2,0),B(2,0)$，设 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，

则 QA，QB 的斜率分别为 $-\frac{1}{k_1}$， $-\frac{1}{k_2}$，

由 $\begin{cases} y=k_1(x+2), \\ y=k_2(x-2). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2(k_2+k_1)}{k_2-k_1}, \\ y=\dfrac{4k_1k_2}{k_2-k_1}. \end{cases}$ 即有 $P\left(\dfrac{2(k_2+k_1)}{k_2-k_1},\dfrac{4k_1k_2}{k_2-k_1}\right)$.

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k_1}(x+2), \\ y=-\dfrac{1}{k_2}(x-2). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2(k_2+k_1)}{k_1-k_2}, \\ y=\dfrac{4}{k_2-k_1}. \end{cases}$ 即有 $Q\left(\dfrac{2(k_2+k_1)}{k_1-k_2},\dfrac{4}{k_2-k_1}\right)$. ……………… 4 分

(Ⅰ)$\because y_P=\dfrac{4k_1k_2}{k_2-k_1}$， $y_Q=\dfrac{4}{k_2-k_1}$

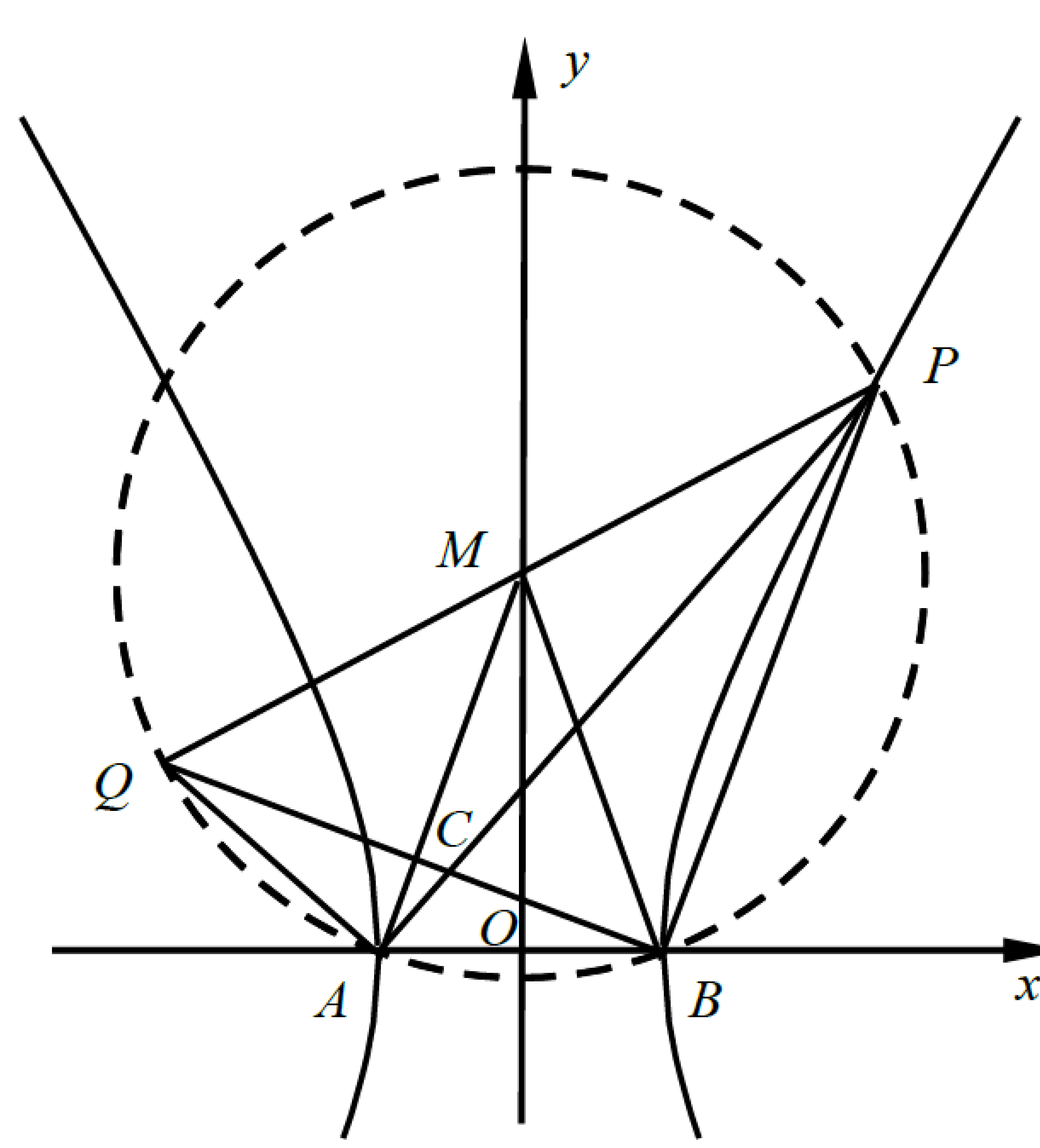
而 $k_1k_2=\dfrac{y_P}{x_P+2}\cdot\dfrac{y_P}{x_P-2}=\dfrac{y_P^2}{x_P^2-4}=\dfrac{12\left(\dfrac{x_P^2}{4}-1\right)}{x_P^2-4}=3$， ………………………………… 6 分

$\therefore \dfrac{y_P}{y_Q}=k_1k_2=3$. ………………………… 7 分

(Ⅱ) 由于 $\angle PAQ=\angle PBQ=90°$，

显然 P, Q, B, A 四点共圆， …………… 8 分

PQ 为直径，PQ 中点 $M\left(0,\dfrac{8}{k_2-k_1}\right)$ 为圆心，



又 $\frac{1}{2}\leqslant \tan\angle AQB\leqslant\frac{\sqrt{15}}{5}$

则 $\tan\angle AQB=\tan\dfrac{\angle AMB}{2}=$

$\tan\angle OMB=\dfrac{2}{\dfrac{8}{k_2-k_1}}=\dfrac{k_2-k_1}{4}\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right]$， …………………………………… 9 分

$\therefore 2\leqslant k_2-k_1\leqslant\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ ①，又 $k_1k_2=3$ ②，

$\dfrac{①^2}{②}$得：$\dfrac{10}{3}\leqslant\dfrac{k_2}{k_1}+\dfrac{k_1}{k_2}\leqslant\dfrac{26}{5}$，解得$3\leqslant\dfrac{k_2}{k_1}\leqslant 5$.

由$\begin{cases}PA: y=k_1(x+2),\\ QB: y=-\dfrac{1}{k_2}(x-2).\end{cases}\Rightarrow x_C=-1$，而$x_P=-x_Q$.

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|BP|}{\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AQ|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-1}{k_2}\right)^2}\,|2-(-1)|\cdot\sqrt{1+(k_2)^2}\,|x_P-2|}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+(k_1)^2}\,|(-1)-(-2)|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-1}{k_1}\right)^2}\,|(-2)-x_Q|}$$

$$=\frac{3\left(k_2+\frac{1}{k_2}\right)}{k_1+\frac{1}{k_1}}=\frac{3\left(k_2+\frac{k_1}{3}\right)}{k_1+\frac{k_2}{3}}=\frac{3(3k_2+k_1)}{k_2+3k_1}=9-\frac{24}{\frac{k_2}{k_1}+3}.$$ ………………………… 11 分

因为$3\leqslant\dfrac{k_2}{k_1}\leqslant 5$，根据单调性，求得$\dfrac{S_1}{S_2}\in[5,6]$ ………………………………………… 12 分

22. 解：（Ⅰ）$\because f'(x)=a\cos x-\dfrac{1}{1+x}(-1<x\leqslant 0)$，又$a$为正实数，

∴函数$f'(x)$在区间$(-1,0]$上单调递增，且$f'(0)=a-1$. ………………………… 2 分

①当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant f'(0)\leqslant 0$，所以函数$f(x)$在$(-1,0]$上单调递减，

此时$f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意. ………………………………………………………… 3 分

②当$a>1$时，$f'(0)=a-1>0$，$f'\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=a\cos\left(\dfrac{1}{a}-1\right)-a<a-a=0$，

由零点存在定理，$\exists x_0\in(-1,0)$时，有$f'(x_0)=0$，即函数$f(x)$在$(-1,x_0)$上递减，

在$(x_0,0)$上递增，所以当$x\in(x_0,0)$时，有$f(x)<f(0)=0$，此时不符合.

综上所述，正实数a的最大值为 1. ……………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当$a=1, x\in(-1,0)$时，$\sin x>\ln(1+x)$，

令$x=-\dfrac{1}{i^2}$时，有$\sin\left(-\dfrac{1}{i^2}\right)>\ln\left(1-\dfrac{1}{i^2}\right)=\ln\dfrac{i^2-1}{i^2}$，即$\sin\dfrac{1}{i^2}<\ln\dfrac{i^2}{i^2-1}$， …… 5 分

累加得，$\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\sin\frac{1}{i^2}<\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n+1}\right)=\ln\frac{2n}{n+1}=\ln 2+\ln\frac{n}{n+1}<\ln 2$. ……… 7 分

（Ⅲ）因为$g(x)=e^{x+1}-\ln(x+1)$，所以$g'(x)=e^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$，即函数$g'(x)$在$(-1,+\infty)$上递增，

又 $g'(0)=\mathrm{e}-1>0, g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$，

由零点存在定理，$\exists x_1\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，有 $g'(x_1)=0$，

即 $\mathrm{e}^{x_1+1}=\dfrac{1}{x_1+1}$，因此 $x_1+1=\ln\dfrac{1}{x_1+1}=-\ln(x_1+1)$.

而函数 $g(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上递减，在 $(x_1,+\infty)$ 上递增，

所以 $m=g(x)_{\min}=g(x_1)=e^{x_1+1}-\ln(x_1+1)=\dfrac{1}{x_1+1}+\ln\dfrac{1}{x_1+1}=\dfrac{1}{x_1+1}+x_1+1$，

即 $m\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$. ·· 9 分

要证方程 $\mathrm{e}^{1+x-m}-\ln(1+x)=0$ 有唯一的实数解，只要证方程 $\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{m}\ln(1+x)=0$ 有唯一的实数解.

设 $H(x)=\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{m}\ln(1+x)\left(2<m<\dfrac{5}{2}\right)$，则 $H'(x)=\mathrm{e}^{1+x}-\dfrac{\mathrm{e}^{m}}{1+x}$，

所以函数 $H'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增，又 $H'(0)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{m}<0, H'(m-1)=\dfrac{\mathrm{e}^{m}(m-1)}{m}>0$，

由零点存在定理，$\exists x_2\in(0,m-1)$ 时，$H'(x_2)=0$，

即 $\mathrm{e}^{1+x_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{m}}{1+x_2}$，因此 $m=1+x_2+\ln(1+x_2)$，··· 10 分

又 $m=\dfrac{1}{x_1+1}+\ln\dfrac{1}{x_1+1}$，设 $m(x)=x+\ln x$，则函数 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

于是 $1+x_2=\dfrac{1}{1+x_1}$ 且 $\ln(1+x_2)=1+x_1$，·· 11 分

而函数 $H(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 上递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上递增，

$\therefore H(x)_{\min}=H(x_2)=\mathrm{e}^{1+x_2}-\mathrm{e}^{m}\ln(1+x_2)=\mathrm{e}^{m}\left(\dfrac{1}{1+x_2}-\ln(1+x_2)\right)=\mathrm{e}^{m}(1+x_1-(1+x_1))=0$，

即函数 $H(x)$ 有唯一零点 x_2，故方程 $\mathrm{e}^{1+x-m}-\ln(1+x)=0$ 有唯一的实数解. ········ 12 分