

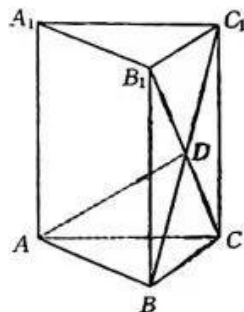
高三数学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $P = \{x \in \mathbb{N} | -3 < x \leq 2\}$, $Q = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap Q =$
 A. $\{-3, 0, 1, 2\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$
 C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
2. 已知 $\frac{3-i}{z} = 1-2i$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限
 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 某班在体育课上组织趣味游戏,统计了第一组 14 名学生的最终得分:13, 10, 12, 17, 9, 12, 8, 9, 11, 14, 15, 12, 10, 12. 这组数据的第 80 百分位数是
 A. 12 B. 13 C. 13.5 D. 14
4. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = 3\sqrt{2}bc$, $\sin C = 2\sqrt{2}\sin B$, 则 $A =$
 A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{12}$
5. 如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面边长为 6,侧棱长为 8, D 是侧面 BB_1C_1C 的两条对角线的交点,则直线 AD 与底面 ABC 所成角的正切值为
 A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
 B. $2\sqrt{3}$
 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
6. 已知 e_1, e_2 是互相垂直的单位向量,若 $e_1 + \sqrt{3}e_2$ 与 $\lambda e_1 - \sqrt{3}e_2$ 的夹角为 120° , 则 $\lambda =$
 A. $\sqrt{3}$ B. -1 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1



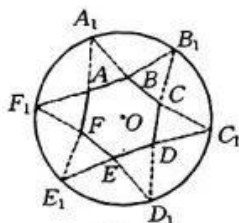


7. 2022 年 12 月 3 日, 南昌市出土了东汉六棱锥体水晶珠灵摆吊坠, 如图(1)所示. 现在我们通过 DIY 手工制作一个六棱锥吊坠模型. 准备一张圆形纸片, 已知圆心为 O , 半径为 $6\sqrt{3}$ cm, 该纸片上的正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O , $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 为圆 O 上的点, 如图(2)所示. $\triangle A_1AB, \triangle B_1BC, \triangle C_1CD, \triangle D_1DE, \triangle E_1EF, \triangle F_1FA$ 分别是以 AB, BC, CD, DE, EF, FA 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后, 分别以 AB, BC, CD, DE, EF, FA 为折痕折起 $\triangle A_1AB, \triangle B_1BC, \triangle C_1CD, \triangle D_1DE, \triangle E_1EF, \triangle F_1FA$, 使 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 重合, 得到六棱锥, 则六棱锥的体积最大时, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为

- A. $\frac{12}{5}$ cm
B. $\frac{25}{4}$ cm
C. $\frac{24}{5}$ cm
D. 5 cm



图(1)



图(2)

8. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递增的函数, $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) \in \mathbf{N}$, 且 $f(f(n)) = 3n$, 则 $f(28) =$

- A. 54 B. 55 C. 56 D. 57

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 直线 $l: x + my + 2m - 3 = 0$, 则下列说法正确的是

- A. 直线 l 过定点 $(-2, 3)$
B. 当 $m = \frac{12}{5}$ 时, 直线 l 与圆 C 相切
C. 当 $m = -1$ 时, 过直线 l 上一点 P 向圆 C 作切线, 切点为 Q , 则 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{2}$
D. 若圆 C 上只有一个点到直线 l 的距离为 1, 则 $m = -\frac{12}{5}$

10. 袋子中装有红球、黄球各 $n (n \geq 3)$ 个, 现从中随机抽取 3 个, 记事件 A 为“三个球都是红球”, 事件 B 为“三个球都是黄球”, 事件 C 为“三个球至少有一个是黄球”, 事件 D 为“三个球不都是红球”, 则

- A. 事件 A 与事件 B 互斥且对立 B. $P(A) = P(\bar{C})$
C. $P(A) + P(D) = 1$ D. 事件 B 与事件 D 可能同时发生

11. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(2x+1)$ 为偶函数, $f(2x-1)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2}, 1)$ 成中心对称, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则下列说法正确的是

- A. $f(2023) = 2$
B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$
C. 直线 $y = 1$ 与函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0, 8]$ 上有 4 个交点
D. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(19) = 19$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, O 为坐标原点, 则下列结论中正确的是

【高三数学 第 2 页 (共 4 页)】



- A. 若 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = |\overrightarrow{PF_1} - \overrightarrow{PF_2}|$, 且 $\overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{F_2Q}$, 则椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- B. 若 $|OP| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 且 $\frac{|PF_1|}{|PQ|} = \frac{8}{15}$, 则 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- C. 若对任意的直线 l 总有 $|PQ| \geq |F_1F_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$
- D. 若存在直线 l , 使得 $|PF_1|, |PF_2|$ 的等比中项为 $|F_1F_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{7}$, 则 $\tan \alpha =$.
14. 若 $(a-x)(x-2)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 80, 则 $a =$.
15. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 直线 $l: x = my + t$ 与抛物线 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 记直线 OM, ON 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = -2$, 则 $t =$.
16. 已知在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 则四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 ; 若 P 为 AB 的中点, 过点 P 的平面截该四面体 $ABCD$ 的外接球所得截面面积为 S , 则 S 的最小值为 . (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = \sin x(a \cos x + \sin x) - \sin^2(\frac{3\pi}{2} - x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的值域.

18. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2S_n = 3a_n - a_1$, 且 $a_1, a_2 + 6, a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

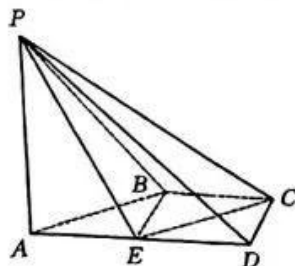
(2) 记数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求使得 $|T_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2000}$ 成立的 n 的最小值.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = \angle PAD = 90^\circ$, $PA = AD = 2BC = 2CD$, E 为棱 AD 的中点.

(1) 在直线 PD 上找一点 F , 使得直线 $CF \parallel$ 平面 PAB , 并说明理由;

(2) 求二面角 $B-PE-C$ 的余弦值.



20. (12 分)

为加快推动旅游业复苏,进一步增强居民旅游消费意愿,山东省人民政府规定自 2023 年 1 月 21 日起至 3 月 31 日继续在全省实施景区门票减免,全省国有 A 级旅游景区免首道门票,鼓励非国有 A 级旅游景区首道门票至少半价优惠.某机构为了了解游客对全省实施景区门票减免活动的满意度,从游客中按年龄 40 周岁及以下和 40 周岁以上随机抽取 100 人,其中年龄在 40 周岁及以下的有 40 人,且有 75% 的游客表示满意,年龄在 40 周岁以上的游客中表示满意的人数与年龄在 40 周岁及以下的游客中表示满意的人数相同.

- (1)根据统计数据完成以下 2×2 列联表,并根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,能否认为对全省实施景区门票减免活动是否满意与年龄有关联?

	不满意	满意	总计
40 周岁及以下			
40 周岁以上			
总计			

- (2)按照年龄和满意与否采用分层抽样从这 100 名游客中随机抽取 10 名,进一步了解游客对本次活动的看法,再从这 10 名游客中随机选取 3 名作为代表对本次活动提出改进措施,记选取的 3 名代表中“40 周岁及以下表示满意”与“40 周岁以上表示满意”的人数差的绝对值为 X ,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

参考公式及数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$\alpha=P(\chi^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且焦距为 6, 点 $(2\sqrt{2}, 1)$ 在双曲线 C 上.

- (1)求双曲线 C 的方程;

- (2)已知 M 是直线 $x = \frac{a^2}{3}$ 上一点, 直线 MF_2 交双曲线 C 于 A (A 在第一象限), B 两点, O 为坐标原点, 过点 M 作直线 OA 的平行线 l , l 与直线 OB 交于点 P , 与 x 轴交于点 Q , 证明: P 为线段 MQ 的中点.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x, g(x) = x \ln x - x^2$.

- (1)判断 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的单调性;

- (2)若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) < g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线