高三数学第一次模拟考试参考答案

一、选择题

1.D　2.A　3.B　4.A　5.C　6.B　7.D　8.D

二、选择题

9. BC　　10. ACD　　11.BD　　12. ACD

12.分析：因为 $\frac{a_{mn}}{a_{m(n-1)}}=\frac{m-n+1}{n}$　　所以 $a_{mn}=\frac{1}{m}C_m^n$

$$\begin{cases}\frac{a_{m2}}{a_{m1}}=\frac{m-1}{2}\\ \frac{a_{m3}}{a_{m2}}=\frac{m-2}{3}\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_{mn}}{a_{m(n-1)}}=\frac{m-n+1}{n}\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{mn}}{a_{m1}}=\frac{(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{2\cdot3\cdot4\cdots n}=\frac{1}{m}C_m^n$$

所以 A 对，B 错

而 $a_{mm}=\frac{1}{m}$

$a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}=\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，可以证出结论。

所以 C 对

$$a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+a_{m4}+...+a_{mm}=\frac{1}{m}(C_m^1+C_m^2+...+C_m^m)=\frac{1}{m}(C_m^0+C_m^1+C_m^2+...+C_m^m-1)=\frac{1}{m}(2^m-1)$$

所以 D 对。

三、填空题

13. 240 ；　　14. x-1=0 或 3x+4y-11=0 或 3x-4y-11=0 ；(写出其中一个即可)

15. 96 ；　　16. 1

16.分析：在 $y=f(x)$ 中，$f'(x)+f(x)=e^{1-x}$，

$\therefore f'(x)e^x+f(x)e^x=e$，

$\therefore (f(x)\cdot e^x)'=(ex)'$

$\therefore f(x)\cdot e^x=ex+c$（$c$ 为常数），

由 $f(1)=1$，解得：$c=0$，

$\therefore f(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$，

$m\frac{x}{e^{x-1}}=\ln(mx)-x+2$

整理可得：$e^{1-x+\ln mx}-(1-x+\ln mx)\text{-}1=0$

可证明$e^{1-x+\ln mx}-(1-x+\ln mx)\text{-}1\geq 0$

当且仅当$(1-x+\ln mx)=0$时，上式取等号

即$m=\frac{e^{x-1}}{x}\Rightarrow m\geq 1$，　　故 m 最小值为 1.

四、解答题

17. 解：(1) $\because f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{2}=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，………2 分

由函数$f(x)$的最小正周期为π． 即$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得$\omega=1$，…………3 分

$\therefore f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，………4 分

$f(\frac{\pi}{6})=0$…………5 分

(2) $\because (2a-c)\cos B=b\cos C$，$\therefore$由正弦定理可得$(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，……6 分

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$．

$\because \sin A>0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$．$\because B\in(0,\pi)$，$B=\frac{\pi}{3}$．………. 7 分

$\because A+C=\pi-B=\frac{2}{3}\pi$，$\therefore A\in(0,\frac{2}{3}\pi)$，$\therefore 2A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，……..8 分

$\therefore \sin(2A-\frac{\pi}{6})\in(-\frac{1}{2},1]$…………9 分

$\therefore f(A)=\sin(2A-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}\in(-1,\frac{1}{2}]$．…………10 分

18 解：

(1) $n\geq 2$时 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=n+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{n^2+n}{2}$　　…….3 分

而$a_1=1$也适合上式，…………4 分

$\therefore a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$ …………5 分

（2） $-a_{2k-1}+a_{2k}=-\dfrac{(2k-1)\cdot 2k}{2}+\dfrac{2k(2k+1)}{2}=2k$ ………. 7 分

$(\cos n\pi)a_n=(-1)^n a_n=(-1)^n\dfrac{n^2+n}{2}=(-1)^n\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……………8 分

$\therefore S_{2n}=-\dfrac{1\times 2}{2}+\dfrac{2\times 3}{2}-\dfrac{3\times 4}{2}+\ldots+\dfrac{2n(2n+1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(-1\times 2+2\times 3-3\times 4+4\times 5-\ldots)$

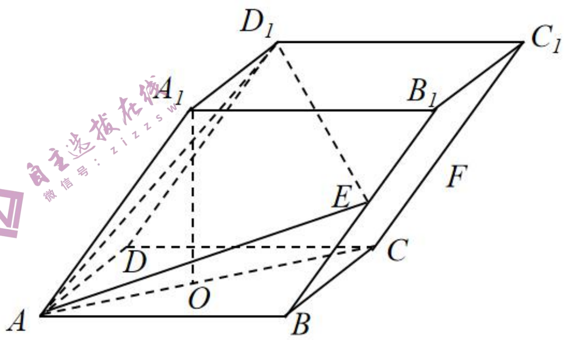
$=\dfrac{1}{2}(2\times 2+4\times 2+6\times 2+\ldots)$ ………………10 分

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2\right)$

$=n^2+n$ …………… . 12 分

19. 解：

（1）证明： 连接A_1D，A_1B，



$\because A_1A=AD=\sqrt{2}$ ，$\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore A_1D=\sqrt{2}$ 同理$A_1B=\sqrt{2}$ ……………. . 2 分

又$\because AD\perp AB$，$AD=AB=\sqrt{2}$

$\therefore DB=2$ ，

$\therefore A_1D\ \perp A_1B$，

连接 BD 交 AC 与点 O，DO=1，可得$A_1O=1$ ………. . 4 分

$\because AO=1$ ，$A_1A=\sqrt{2}$

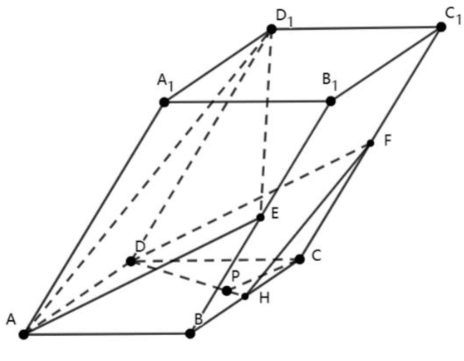
由勾股定理可得 $\therefore A_1O\perp AO$………… . . 5 分

（2）

法一：

取 BC 中点 H，连接 HD,HF,DF

易得$EF//DA, EF=DA$



$\therefore$四边形 AEFD 为平行四边形，$\therefore DF//AE$

又$\because DF\not\subset$面D_1AE，$AE\subset$面D_1AE

$\therefore$ DF//面D_1AE ……….7 分

同理$\because$ FH//$BC_1//D_1A$

$FH \not\subset$ 面D_1AE，$D_1A \subset$ 面D_1AE

$\therefore$ FH//面D_1AE …………9 分

$FH \cap DF = F$

$\therefore$ 面DFH//面D_1AE …………10 分

$\therefore$ 点P必在DH上，且当$CP \perp DH$时取得CP的最小长度

由等面积法得CP的最小长度为$\frac{\sqrt{10}}{5}$……………12 分

法二：由第一问$A_1O \perp AO$ 又 $A_1O \perp BD$

$\therefore A_1O \perp$ 平面 $ABCD$

以 O 为坐标原点，OA，OB，OA_1所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系

$A(1,0,0)$、$D(0,-1,0)$、$A_1(0,0,1)$、$B(0,1,0)$、$C(-1,0,0)$

$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = (-2,-1,1)$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = (-\frac{3}{2},1,\frac{1}{2})$……………7 分

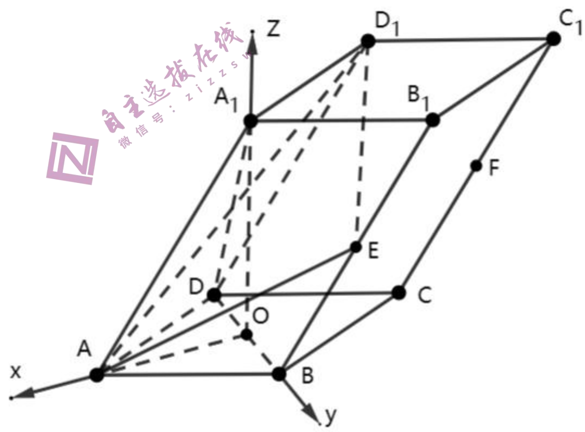
设平面 AD_1E 法向量为$\vec{n} = (x,y,z)$

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases}$$

$\therefore -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}z = 0$

令 $x = 3$，则 $z = 7$，$y = 1$.

$\therefore \vec{n} = (3,1,7)$………………..9 分



设点p为$(m,n,0)$，$\overrightarrow{FP} = (m+\frac{3}{2},n,-\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{FP} \cdot \vec{n} = 0$，则$3m+n+1=0$ ………10 分

$|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(m+1)^2+n^2} = \sqrt{10m^2+8m+2}$

当且仅当$m = -\frac{2}{5}$时，$|\overrightarrow{CP}|$有最小值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$ ……………12 分

20. 解：

（1）由题意可知ξ的可能取值有 0、1、2、3，……..1 分

$P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$，$P(\xi=1) = \frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$，$P(\xi=2) = \frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$，$P(\xi=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$…..5 分

所以，随机变量ξ的分布列如下表所示：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

…….. 6 分

所以，$E(\xi)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$ ……. 7 分

（2）设 B=“任取一人新药对其有效”，A_i=“患者来自第 i 组”（i=1,2,3，分别对应甲，乙，丙），

则$\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$，且$A_1$，$A_2$，$A_3$两两互斥，根据题意得

$P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.32$，$P(A_3)=0.28$，

$P(B|A_1)=0.64$，$P(B|A_2)=0.75$，$P(B|A_3)=0.8$，……. 8 分

由全概率公式，得

$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$

$=0.4\times0.64+0.32\times0.75+0.28\times0.8$

$=0.72$ ………10 分

任意选取一人，发现新药对其有效，计算他来自于乙组的概率

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.32\times0.75}{0.72}=\frac{1}{3}$$

所以，任意选取一人，发现新药对其有效，则他来自乙组的概率为$\frac{1}{3}$. ……12 分

21. 解：

（1）由已知可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ， 椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases}a^2+b^2=7\\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$$ …. . 2 分

所以双曲线方程：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，…….. 3 分

椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$…….. 4 分

（2）设 $p(x_0,t),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),A(-2,0),B(2,0)$

P、A、N三点共线，$\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{t}{x_0+2}$

P、B、M三点共线，$\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{t}{x_0-2}$

相除：$\frac{y_2(x_1-2)}{(x_2+2)y_1}=\frac{x_0-2}{x_0+2}$ ……… 6 分

令 $x_T=n$　　　则设 $l_{MN}:x=my+n$

联立椭圆方程：$\begin{cases}x=my+n\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}\Rightarrow(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$

$\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6mn}{3m^2+4}\\y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}\end{cases}$ ………… . . 8 分　$\therefore\ \frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-n^2}{2mn}$

$\frac{y_2(x_1-2)}{(x_2+2)y_1}=\frac{y_2(my_1+n-2)}{y_1(my_2+n+2)}=\frac{my_1y_2+(n-2)y_2}{my_1y_2+(n+2)y_1}=\frac{2mny_1y_2+2n(n-2)y_2}{2mny_1y_2+2n(n+2)y_1}$

$=\frac{(4-n^2)(y_1+y_2)+2n(n-2)y_2}{(4-n^2)(y_1+y_2)+2n(n+2)y_1}=\frac{(2-n)[(2+n)y_1+(2-n)y_2]}{(2+n)[(2+n)y_1+(2-n)y_2]}=\frac{2-n}{2+n}$

若存在 $x_p=4x_T$，即$x_0=4n$

$\frac{2-n}{2+n}=\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{4n-2}{4n+2}$，得 $n^2=1$，…… . 10 分

又 P 在第一象限，所以 $n=1,P(4,3)$ ……… 12 分

法二：$p(x_0,y_0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),A(-2,0),B(2,0)$

直线 $AP:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$

$\begin{cases}y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow[3+\frac{4y_0^2}{(x_0+2)^2}]x^2+\frac{16y_0^2}{(x_0+2)^2}x+\frac{16y_0^2}{(x_0+2)^2}-12=0$ …… . 6 分

由$-2x_N=\frac{16y_0^2-12(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+4y_0^2}$，又因为 P 在双曲线上，满足 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$，即$4y_0^2=3x_0^2-12$

所以 $-x_N=\frac{8y_0^2-6(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+4y_0^2}=\frac{6x_0^2-24-6(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+3x_0^2-12}=\frac{-24(x_0+2)}{6x_0(x_0+2)}=\frac{-4}{x_0}$

即 $x_N=\dfrac{4}{x_0}$ ……. . 8 分

同理 $BP: y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，可得 $x_M=\dfrac{4}{x_0}$，所以 $x_T=\dfrac{4}{x_0}$ ………9 分

若存在 $x_p=4x_T$，即 $x_0=4\times\dfrac{4}{x_0}$， ……. . 10 分

而 P 在第一象限，所以 $x_0=4$，即 $P(4,3)$ ………12 分

22. 解：

（1）法一：

$f(x)=\sin x-\ln(x+1)$

$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$……….1分

$=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{1+x}\geq 1-2(\dfrac{x}{2})^2-\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x+1}\geq 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{1+x}(0\leq x\leq 1)$

$=\dfrac{2+2x-x^2-x-2}{2+2x}=\dfrac{x(1-x)}{2+2x}\geq 0$ ……. . 3 分

所以 $f(x)$在$[0,1]$单增，$f(x)\geq f(0)=0$ ………4 分

法二：

$f(x)=\sin x-\ln(x+1)$

$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}(x=0)$

……1 分

$f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=-\cos x-2\dfrac{1}{(1+x)^3}<0$ 恒成立，……. . 2 分

所以 $f''(x)$ 单减，又因为 $f''(0)>0, f''(1)<0, \exists x_0\in(0,1)$，使得 $f''(x_0)=0$

所以 $f'(x)$ 先增后减，$f'(0)=0, f'(1)=cos1-\dfrac{1}{2}>0$，∴ $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 单增，$f(x)\geq f(0)=0$ ……. 4 分

法一：$g(x)=2e^x-2-\sin x+a\ln(x+1)$

$g(x)=2(e^x-x-1)+x-\sin x+x-\ln(x+1)+(a+1)\ln(x+1)\geq 0$ ………6 分

易证：$(e^x-x-1\geq 0, x-\sin x\geq 0, x-\ln(x+1)\geq 0$, 且在$x=0$处取等号 ……8 分

当$x>0$时，$\ln(x+1)>0$，

当 $a+1\geq 0$ 时，即 $a\geq -1$ 时，$g(x)\geq 0$符合题意，………10 分

当 $a<-1$ 时，

$g(0)=0, g'(x)=2e^x-\cos x+\dfrac{a}{x+1}, g'(0)=1+a<0, g'(-a)=2e^{-a}-\cos(-a)+\dfrac{a}{-a+1}>0,$，

$g''(x)=2e^{x}+\sin x-\frac{a}{(x+1)^{2}}>0, g'(x)$ 单增，$\exists x_1\in(0,-a)$,使得$g'(x_1)=0$， $g(x)$在$(0,x_1)$单减，

$g(x_1)<g(0)=0$矛盾，综合 $a\geq -1$ …………12 分

法二：$g(x)=2e^{x}-2-\sin x+a\ln(x+1)$， $g'(x)=2e^{x}-\cos x+\frac{a}{x+1}, x\in(0,\pi)$ ……5 分

〈1〉当 $a\geq 0$ 时， $g'(x)\geq 2e^{x}-1>0, x\in(0,\pi)$， $g(x)$在$[0,\pi]$单增 $g(x)\geq g(0)=0$符合题意，……7 分

〈2〉当 $a<0$ 时, $g'(x)=2e^{x}-\cos x+\frac{a}{x+1}$在$(0,\pi)$ 单增， $g'(0)=2+a-1=1+a$……. 8 分

①当 $a+1\geq 0$时，即 $-1\leq a<0$时，

$g'(x)\geq g'(0)=1+a\geq 0$ $g(x)$在$[0,\pi]$单增 $g(x)\geq g(0)=0$符合题意，……. 10 分

②当 $a+1<0$时，即 $a<-1$时，同上。

综上：$a\geq -1$ …………. . 12 分