高一数学参考答案及评分标准

2023．7

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1-4：CBBC　　5-8：DAAD

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．AC　　10.AB　　11．BC　　12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．10　　14．2　　15．$\frac{1}{2}$　　16．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（1）由已知得 $(a+0.040)\times10=0.60$，故 $a=0.02$． ……………………………… 2 分

因为 $(0.005+b+0.025+0.040+0.020)\times10=1$，所以 $b=0.01$．………………… 4 分

（2）该班学生数学成绩的平均分的估计值为

$(55\times0.005+65\times0.010+75\times0.025+85\times0.040+95\times0.020)\times10=81$．

………………………………………………………………………………………… 7 分

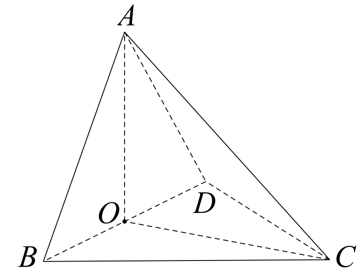
因为 $(0.005+0.010+0.025)\times10=0.4$，$(0.005+0.010+0.025+0.040)\times10=0.8$，

所以中位数在 $[80,90)$ 内．………………………………………………………………… 8 分

故中位数为 $80+\frac{0.5-0.4}{0.4}\times10=82.5$．……………………………………………… 10 分

18.（1）证明：连接 OC.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，因为 $AB=AD$，O 是 BD 的中点，所以 $AO\perp BD$， ……… 1 分



$AO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times2=1$．……………………… 2 分

在等边△BCD 中，$OC=CD\sin\frac{\pi}{3}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．……… 3 分

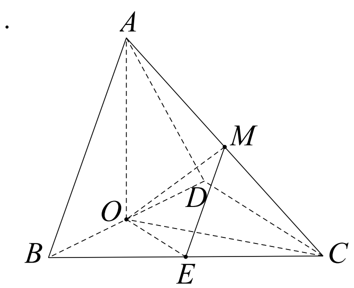
在△AOC 中，$AO=1$，$OC=\sqrt{3}$，$AC=2$，

所以 $AO^2+CO^2=AC^2$，所以 $\angle AOC=90°$，即 $AO\perp OC$．………………………… 5 分

又 $OC\cap BD=O$，$OC\subset$ 平面 BCD，$BD\subset$ 平面 BCD，

所以 $AO\perp$ 平面 BCD．……………………………………………………………… 6 分

（2）分别取 AC,BC 的中点 M，E，连接 OM、ME、OE．



因为 O,E,M 分别是 BD,BC,AC 的中点，

所以 EM,OE 分别是△ABC，△BCD 的中位线，

所以 $OE\parallel DC$，$EM\parallel AB$，

所以 $\angle OEM$ （或其补角）就是异面直线 AB 与 CD 所成的角.………………… 8 分

在△OEM 中，$EM=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OE=\frac{1}{2}DC=1$.

因为 OM 是 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 斜边上的中线，所以 $OM=\frac{1}{2}AC=1$.……………………… 11 分

在等腰△OEM 中，$\cos\angle OEM=\frac{\frac{1}{2}EM}{OE}=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

所以异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$．………………………………12 分

19. 解：（1）由题意可知，在其余 3 道题中，三道题答对的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，

所以甲得 40 分的概率为 $P_{40}=(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$． ……………………………… 4 分

（2）甲得 25 分的概率 $P_{25}=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$； ………………………………………… 6 分

甲得30分的概率 $P_{30}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$； ………………………… 8 分

甲得35分的概率 $P_{35}=(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$． ………………………… 10 分

而甲得40分的概率为 $\frac{1}{18}$，故甲得30分的概率最大．………………………… 12 分

20． 解：（1）因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$， ………………………… 1 分

即 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，即 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_1-2\lambda\boldsymbol{e}_2$．

由平面向量基本定理，得 $\lambda=2$，$k=-2\lambda$．

所以 $k=-4$． ………………………………………………………………………… 3 分

$|\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^{\ 2}+4k\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+k^2\boldsymbol{e}_2^{\ 2}=4+4k\cos\theta+k^2$．

所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+4\times(-4)\cos\theta+(-4)^2}=\sqrt{20-16\cos\theta}$． ………………………… 5 分

因为 $0<\theta<\pi$，所以 $-1<\cos\theta<1$，所以 $2<|\boldsymbol{b}|=\sqrt{20-16\cos\theta}<6$． … 6 分

（2）因为 $\theta=\frac{\pi}{3}$，所以 $|\boldsymbol{b}|^2=4+4k\cos\frac{\pi}{3}+k^2=4+2k+k^2$， ………………………… 7 分

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)=2-2k+(k-4)\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}k$． ………………………… 8 分

由 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，得

$\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{-\frac{3}{2}k}{4+2k+k^2}\boldsymbol{b}$． ………………………………………………………… 10 分

由题意 $\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\frac{-\frac{3}{2}k}{4+2k+k^2}=\frac{1}{2}$．

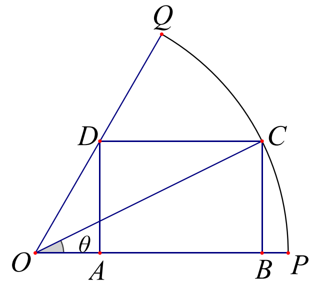
整理得 $k^2+5k+4=0$，

解得 $k=-1$ 或 $k=-4$．………………………………………………………… 12 分

21．（1）解：在 Rt△OBC 中，$BC=\sin\theta$，$OB=\cos\theta$． ………………………… 2 分

在 Rt△OAD 中，$\frac{AD}{OA}=\tan\frac{\pi}{3}$，

故 $OA=\frac{AD}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{AD}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$． ………………………………………… 4 分



矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AB\cdot BC=(OB-OA)\cdot BC$

$=(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}})\cdot\sin\theta$ …… 6 分

（2）由 $S=(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}})\cdot\sin\theta=\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2\theta$

$=\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$ ………………………………………… 8 分

$=\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos2\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ………………………………………… 10 分

由 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$，得 $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$．

因此，当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，S 取最大值，且 $S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{6}$． ………………………… 12 分

22.（1）由 $a\cos C+\frac{1}{2}c=b$ 及正弦定理，得 $\sin A\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\sin B$． ………… 1 分

因为 $B=\pi-(A+C)$，所以 $\sin B=\sin\left(A+C\right)$．

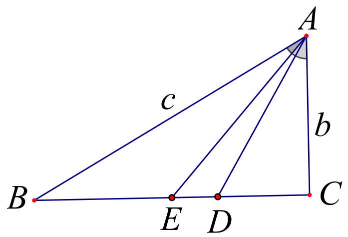
于是有 $\sin A\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\sin(A+C)$， …………………………………… 2 分

即 $\sin A\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

即 $\frac{1}{2}\sin C=\cos A\sin C$． ……………………………………………………… 3 分

又 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$． 而 $A\in\left(0,\pi\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$． ……………… 4 分

（2） 由题意，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，



即 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}$，

即 $\sqrt{3}bc=(b+c)AD$．

又 $AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $3bc=4(b+c)$①……………………………………… 6 分

由 AE 是 BC 边上的中线，得 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$$\overrightarrow{AE}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc).$$

又 $AE=\sqrt{7}$，故有 $b^2+c^2+bc=4\times(\sqrt{7})^2=28$②……………………… 8 分

由①②及 $b<c$，解得 $b=2$，$c=4$. ………………………………………………10 分

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=12$，

所以 $a=2\sqrt{3}$． ……………………………………………………………………12 分