

西咸新区 2022 ~ 2023 学年度第二学期期末质量监测

高二数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 2. A 3. C 4. B 5. A 6. B 7. D 8. A 9. B 10. C 11. B 12. D

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 70 14. -4 15. 4 16. 2(2 分) $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ (3 分)

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. 解:(I) $\because \sqrt{3}a \cos B - b \sin A = 0$,
 $\therefore \sqrt{3} \sin A \cos B - \sin B \sin A = 0$.
 $\because \sin A > 0, \therefore \sqrt{3} \cos B - \sin B = 0$, 可得 $\tan B = \sqrt{3}$,
 $\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}$ (6 分)

(II) $\because B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{7}, a + c = 5$,
 $\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$, 即 $7 = (a + c)^2 - 3ac, \therefore ac = 6$,
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (12 分)

18. 解:(I) 由题意得完成的 2×2 列联表如下:

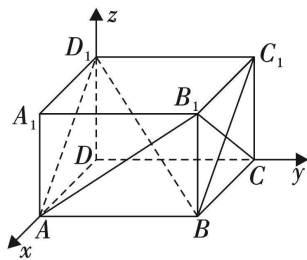
	不太了解	比较了解	总计
男性	125	165	290
女性	75	135	210
总计	200	300	500

$\therefore K^2 = \frac{500 \times (125 \times 135 - 165 \times 75)^2}{200 \times 300 \times 290 \times 210} \approx 2.771 > 2.706$,
 $\therefore$ 有 90% 的把握认为“居民对垃圾分类的了解程度”与“性别”有关. (6 分)

(II) 由题意可知,抽到的女性有 $5 \times \frac{30}{75} = 2$ 人,抽到的男性有 $5 \times \frac{45}{75} = 3$ 人,
 $\therefore X$ 可取的值为 0, 1, 2,
 $\therefore P(X=0) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$.
 $\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$ (12 分)

19. 解:(I) 证明:如图,以 D 为坐标原点,建立空间直角坐标系,
 则 $B(1, 2, 0), C(0, 2, 0), B_1(1, 2, 1), D_1(0, 0, 1)$,
 $\therefore \overrightarrow{CB_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{BD_1} = (-1, -2, 1)$,
 $\therefore \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = -1 + 0 + 1 = 0$,
 $\therefore B_1C \perp BD_1$ (6 分)

(II) $\because A(1, 0, 0)$,
 $\therefore \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{AB_1} = (0, 2, 1)$.
 设平面 ABC_1D_1 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y = 0, \\ -x + z = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$.
 设直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角为 θ ,



$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 解: (I) 由题意可知, $|MF_1| = |F_1F_2| = 2c$, $|MF_2| = 2a - |MF_1| = 2a - 2c$,

$$\therefore 2c = 2(2a - 2c), \text{ 得 } \frac{c}{a} = \frac{2}{3},$$

即椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$. (6 分)

(II) $\because \triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2a + 2c = 10$, 即 $a + c = 5$,

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, \therefore a = 3, c = 2.$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 5, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

设 $M(x_0, y_0)$, 则在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $|MF_1| = |F_1F_2| = 2c = 4$,

$$\therefore |MF_2| = 2a - |MF_1| = 2a - 2c = 2,$$

$\therefore$ 在 $\triangle MF_1F_2$ 中, 边 MF_2 上的高为 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$,

$$\therefore S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 4 \times y_0 = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15}, \text{ 得 } y_0 = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\text{代入椭圆 } C \text{ 的方程得 } \frac{x_0^2}{9} + \frac{15}{5 \times 4} = 1, \text{ 得 } x_0 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right). \quad (12 \text{ 分})$$

21. 解: (I) 当 $a = 1$ 时 $f(x) = \ln x - x^2 + x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 0. \quad (6 \text{ 分})$$

(II) 由 $f(x) = \ln x - ax^2 + x + \ln a$ ($a > 0$), 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + 1$ ($a > 0$), 易知 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

①由 (I) 可知, 当 $a = 1$ 时 $f(x) \leq 0$, 符合题意;

$$\text{②当 } 0 < a < 1 \text{ 时 } f'(1) = 2(1-a) > 0, f'\left(\frac{1}{a}\right) = a - 1 < 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_1 \in \left(1, \frac{1}{a}\right), \text{ 使得 } f'(x_1) = 0,$$

故当 $x \in \left(x_1, \frac{1}{a}\right)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(x) > f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{a} + \ln a = 0, \text{ 不符合题意;}$$

$$\text{③当 } a > 1 \text{ 时 } f'(1) = 2(1-a) < 0, f'\left(\frac{1}{a}\right) = a - 1 > 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_2 \in \left(\frac{1}{a}, 1\right), \text{ 使得 } f'(x_2) = 0,$$

故当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $f(x) \leq f(1) = \ln a - a + 1$,

$$\text{令 } g(a) = \ln a - a + 1 \text{ (} a > 1 \text{)}, \text{ 则 } g'(a) = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} < 0,$$

故 $g(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore g(a) < g(1) = 0, \text{ 故 } f(x) < 0, \text{ 符合题意.}$$

综上, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$. (12 分)

(二) 选考题: 共 10 分. 考生从 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

解: (I) 由于曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = -2 + 3\sin t \end{cases}$ (t 为参数),

$$\text{则消去参数 } t, \text{ 可得 } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9. \quad (2 \text{ 分})$$

由于直线 l 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta - 3 = 0$, 且 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

则直线 l 的直角坐标方程为 $3x+4y-3=0$ (5 分)

(II) 由 (I) 可知, 圆 C 的圆心为 $(2, -2)$, 半径为 3,

则圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|6-8-3|}{\sqrt{9+16}} = 1$,

则由垂径定理可得, $|AB| = 2\sqrt{3^2-1^2} = 4\sqrt{2}$ (10 分)

23. (10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

解: (I) $f(x) \leq 5$, 即 $|x-1| + |x+2| \leq 5$,

当 $x \leq -2$ 时, 不等式 $|x-1| + |x+2| \leq 5$, 可化为 $1-x-x-2 \leq 5$, 解得 $-3 \leq x \leq -2$;

当 $-2 < x < 1$ 时, 不等式 $|x-1| + |x+2| \leq 5$, 可化为 $1-x+x+2 \leq 5$, 即 $3 \leq 5$, 恒成立;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $|x-1| + |x+2| \leq 5$, 可化为 $x-1+x+2 \leq 5$, 解得 $1 \leq x \leq 2$.

综上, 不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集为 $[-3, 2]$ (5 分)

(II) $f(x) = |x-1| + |x+2| \geq |(x-1)-(x+2)| = 3$, 当且仅当 $(x-1)(x+2) \geq 0$ 时等号成立,

$\therefore a+b=3$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{1}{3}\left(2 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}}\right) = \frac{4}{3}$,

当且仅当 $a=b=\frac{3}{2}$ 时等号成立,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$ (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线