

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

数 学(文科)

本试卷共 4 页,全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

A1. 函数 $y = \frac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $[-1, 1)$

D2. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | 1 < 2x < 16\}$, 则集合 $A \cup B =$

- A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$ C. $\{x | 1 < x < 3\}$ D. $\{x | -1 < x < 4\}$

A3. “ $a < 0$ 且 $b < 0$ ”是“ $a + b < 2\sqrt{ab}$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

B4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, 则 $a_5 =$

- A. -3 B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

D5. 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上恰有 3 个零点, 则 φ 可以为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{3}$

C6. 函数 $f(x) = x^n(x+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) 有两个极值点, 则 n 的最小值为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

B7. 已知曲线 $C_1: y = \sin 2x - \cos 2x$, 曲线 $C_2: y = \sin 2x + \cos 2x$, 则下面结论正确的是

- A. 将曲线 C_1 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 可得 C_2 B. 将曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 可得 C_2
C. 将曲线 C_1 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 可得 C_2 D. 将曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 可得 C_2

【C-022】数学 B(文科)试卷 第 1 页(共 4 页)

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 记 $b_n = 2a_{n+1} - a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 中存在连续三项构成等差数列, q 为
- A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 1 或 2 C. 1 或 $\frac{1}{2}$ D. 1

9. 下列有 3 个命题:

p_1 : 向量 $\vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2)$, 则 $\triangle OAB$ 面积 $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$;

p_2 : 对任意三角形, 存在两个内角 α, β , 使得 $\sin \alpha < \cos \beta$;

p_3 : 两个向量 a, b , 若 $a \parallel b$, 则存在 $\lambda \in \mathbf{R}, a = \lambda b$,

其中真命题个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 已知实数 $m, n \in [1, 2]$, 那么 $\frac{m-n}{m+n}$ 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{2}, 2]$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ C. $[0, \frac{1}{3}]$ D. $[-\frac{1}{3}, 0]$

11. 三个向量 $a, b, c, |a|=1, |b|=2, |c|=3$, 则 $|2c-a-b|$ 的最大值和最小值分别为

- A. 9, 3 B. 6, 3 C. 9, 4 D. 6, 4

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n, a_1 = -100, a_{n+1} = |a_n - 2| + 2a_n + 2$, 满足 $S_n > 0$ 的最小 n 值为

- A. 31 B. 32 C. 33 D. 34

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 向量 $a = (1, m), b = (m, 2)$, 若 $a \parallel b$, 则 $m = \pm\sqrt{2}$.

14. 函数 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & (0 < x \leq 1) \\ \log_2(x+2), & (x \leq 0) \end{cases}$, 若 $f(t) \geq 0$, 则实数 t 的取值范围为 $[-1, 1]$.

16. 已知三角形的重心到三条边的距离分别为 3, 4, 6, 则这个三角形的面积为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设 $m \in \mathbf{R}$, 命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}^+, x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}m$; 命题 $q: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - mx_0 + 1 = 0$.

(1) 若 p 为真命题, 求 m 的最大值;

(2) 若 $p \vee q$ 为真命题, 且 $p \wedge q$ 为假命题, 求 m 的取值范围.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + 3a_1 n}{6}$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + mx + n$, 且 $x = 1$ 是函数 $g(x) = xf(x)$ 的一个极值点.

(1) 求证 $y = f(x)$ 图象经过一个定点, 并求定点坐标;

(2) 函数 $u(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分)

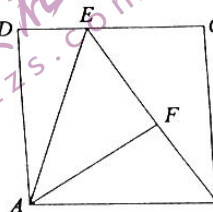
已知无穷数列 $\{a_n\}$ 各项均不为 0, 记向量 $\vec{p}_n = (a_n, a_{n+1})$, ($n \in \mathbb{N}^+$), 可得一个向量序列 $\{\vec{p}_n\}$.

(1) 若 $\{\vec{p}_n\}$ 是一组平行向量, 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $a_n = 2n - 1$, 记向量 $\vec{T}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$, 如果 $\vec{T}_n \parallel \vec{p}_5$, 求 n 的值.

21. (12 分)

如图所示, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 边 CD 上有一个动点 E , AF 垂直 BE 于 F .



- (1) 若 $DE=1$, 求 AF 的长;
- (2) 求 $\tan \angle EAF$ 的最小值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x-1}$ ($a > 0$) 有两个极值点 α, β ($\alpha < \beta$), 且 $\alpha^2 + \beta^2 > \frac{17}{4}$.

- (1) 求实数 a 的范围;
- (2) 求证: $f(\beta) - f(\alpha) > \frac{5}{2}$.