



姓名 _____ 准考证号 _____

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题的答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

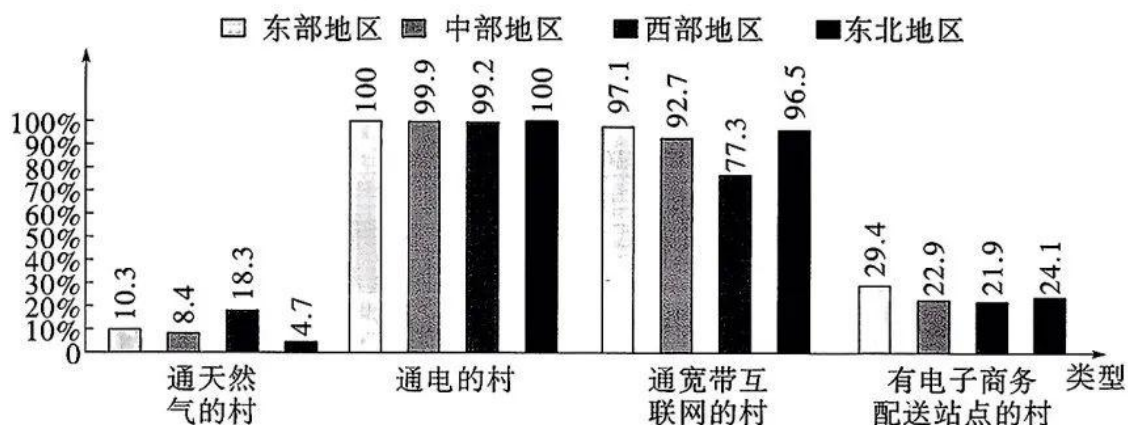
1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 1 < 5\}$, $B = \{x \mid 3x - 2 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{2, 3\}$
2. 若 $(1-i)(z-1) = 3-i$, 则 $z =$
 A. $3+i$ B. $3-i$ C. $1+2i$ D. $1-2i$
3. “ $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ ”是“ $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 数学家李冶在其著作《测圆海镜》中系统地介绍了天元术,即利用未知数列方程的一般方法,与现代数学中列方程的方法基本一致.先“立天元一为……”,相当于“设 x 为……”,再根据问题给出的条件列出两个相等的代数式,最后通过类似合并同类项的过程,得出一个形如 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的方程. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, 若 $f(2) = 5 \cdot 2^{n+1} - 3n - 8$, 则 $\sum_{i=0}^{20} a_i =$
 A. 640 B. 670 C. 672 D. 680

数学试题·黑卷 第 1 页(共 8 页)

5. 已知向量 a, b 满足 $a = \lambda b (\lambda > 0)$, $|b| = 2$, $|a - b| = 1$, 则 $(a + b) \cdot a =$
 A. 3 B. 15 C. -3 或 15 D. 3 或 15
6. 设 $5a + 1 = 5 \ln 5$, $b + e^{-3} = 3$, $e^3 c + 1 = e^{6+e^3}$, 则
 A. $b < c < a$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
7. 已知点 P 在圆 $C: (x - a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 点 $A(0, 2)$, 若 $|PA|$ 的最小值为 1, 则过点 A 且与圆 C 相切的直线方程为
 A. $x = 0$ 或 $7x + 24y - 48 = 0$ B. $x = 0$ 或 $7x - 24y - 48 = 0$
 C. $x = 1$ 或 $24x - 7y - 48 = 0$ D. $x = 1$ 或 $24x + 7y - 48 = 0$
8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 为奇函数, $g(x) = \cos \omega x + a (a$ 为常数), 且 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, |f(x_1) - g(x_2)| \leq 2$ 恒成立. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴右侧的交点依次为 A_1, A_2, \dots , O 为坐标原点, 若 $\triangle OA_1 A_2$ 的面积最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$, 且 $\angle A_1 O A_2$ 为钝角, 则 ω 的取值范围是
 A. $\left[\frac{\sqrt{5}\pi}{4}, 3\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{10}\pi}{4}, 3\right]$ C. $\left[\frac{\sqrt{5}\pi}{4}, 6\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{10}\pi}{4}, 6\right]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 为了解我国农业、农村、农民的基本情况, 将全国第三次农业普查的部分数据整理得到如下的柱状图(单位: %), 则



- A. 东北地区的四项数据均比中部地区高
 B. 西部地区的四项数据均比其他三个地区低
 C. 中部地区的发展情况相较于西部地区的发展较好
 D. 东部地区的发展情况相较于其他三个地区的发展较好

数学试题·黑卷 第2页(共8页)

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

(1)从下面三个条件中选一个,证明:数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

① $S_n = \frac{n(a_n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$; ②数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列; ③数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列。

(2)若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $a_1=1, a_3=5$,求数列 $\left\{\frac{n}{(n+2)S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分。

18. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right) = \frac{2c-b}{2a}$ 。

(1)求 A ;

(2)若 $b+c=3$,求 BC 边中线 AM 的取值范围。

19. (12分)

长征七号 A 运载火箭将测发周期由 32 天缩减到 26 天,进一步提高了火箭发射效率. 科研人员为研究传统依次测试与合并测试是否能达到相同的效果,进行了 30 次传统依次测试模拟实验和 50 次合并测试模拟实验,对是否符合发射状态得到如下数据:

	符合发射状态	不符合发射状态
传统依次测试	5m	5
合并测试	40	2m

- (1) 求 m 的值;
- (2) 能否有 99% 的把握认为发射状态与测试方式有关?
- (3) 为进一步分析合并测试是否是影响符合发射状态的技术原因,在 50 次合并测试模拟实验中,用分层抽样的方法抽取 10 次模拟实验,再从这 10 次模拟实验中随机抽取 3 次进行复盘分析,记抽到不符合发射状态的模拟实验的次数为 X ,求 X 的分布列及期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

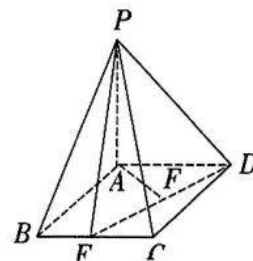
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. (12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=3$, $AD=2\sqrt{3}$, E 为 BC 上一点, F 为 DE 的中点, 且三棱锥 $P-CDE$ 与四棱锥 $P-ABED$ 的体积比为 $1:3$.

(1) 证明: $DE \perp$ 平面 PAF ;

(2) 若 PE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 求二面角 $A-PB-F$ 的余弦值.



21. (12分)

已知双曲线 T 与椭圆 $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 共焦点, 且焦点到 T 的渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线 T 的渐近线方程;

(2) 已知过点 $F(2, 0)$ 的直线 l 与双曲线 T 交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 E , 设

过 E, F 的圆的半径为 r . 证明: 当圆心在 x 轴上时, $\frac{|PQ|}{r}$ 是定值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{e^x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $\frac{3+2\ln x}{e^x} \leq f(x) + 2x$, 求 a 的取值范围.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主选拔在线官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线