

## 高三数学试卷(理科)

### 考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

### 第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x < 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + mx - 12 = 0\}$ , 若  $A \cap B = \{-2\}$ , 则  $m =$

- A. 4                      B. -4                      C. 8                      D. -8

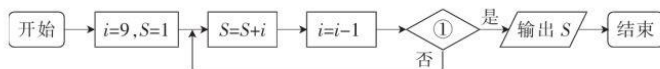
2. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $3 + ai = b - (2a - 1)i$ , 则  $|3a + bi| =$

- A.  $\sqrt{10}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C. 3                      D. 4

3. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \leq 2, \\ x + 1 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 4x + y$  的取值范围为

- A.  $[-5, -1]$                       B.  $[-5, 5]$                       C.  $[-1, 5]$                       D.  $[-7, 3]$

4. 如图所示的程序框图, 当其运行结果为 31 时, 则图中判断框①处应填入的是



- A.  $i \leq 3?$                       B.  $i \leq 4?$                       C.  $i \leq 5?$                       D.  $i \leq 6?$

5. 设双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ,  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$ ,  $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{7} = 1$  的离心率分别为  $e_1, e_2, e_3$ , 则

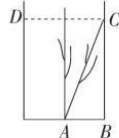
- A.  $e_3 < e_2 < e_1$   
 B.  $e_3 < e_1 < e_2$   
 C.  $e_1 < e_2 < e_3$   
 D.  $e_2 < e_1 < e_3$

6. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $CC_1, DD_1$  的中点, 则异面直线  $AF, DE$  所成角的余弦值为

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$                       C.  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$                       D.  $\frac{1}{5}$

7. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有一个“引葭赴岸”问题: “今有池方一丈, 葭生中央, 出水一尺, 引葭赴岸, 适与岸齐. 问水深、葭长各几何?” 其意思为“今有水池 1 丈见方(即  $CD = 10$  尺), 芦苇生长在水的中央, 长出水面的部分为 1 尺. 将芦苇向池岸牵引, 恰巧与水岸齐接(如图所示). 试问水深、芦苇的长度各是多少? 假设  $\theta = \angle BAC$ , 现有下述四个结论:

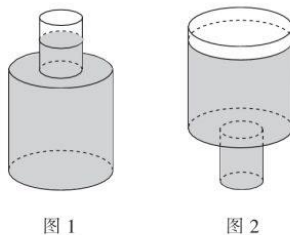
- ①水深为 12 尺; ②芦苇长为 15 尺;  
 ③  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$ ; ④  $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{17}{7}$ .



其中所有正确结论的编号是

- A. ①③                      B. ①③④                      C. ①④                      D. ②③④
8. 将函数  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$  的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍(纵坐标不变), 再将所得到的图象向右平移  $m(m > 0)$  个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象. 若  $g(x)$  为奇函数, 则  $m$  的最小值为

- A.  $\frac{\pi}{18}$                       B.  $\frac{\pi}{9}$                       C.  $\frac{\pi}{6}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$
9. 一个由两个圆柱组合而成的密闭容器内装有部分液体, 小圆柱底面半径为  $r_1$ , 大圆柱底面半径为  $r_2$ , 如图 1 放置容器时, 液面以上空余部分的高为  $h_1$ , 如图 2 放置容器时, 液面以上空余部分的高为  $h_2$ , 则  $\frac{h_1}{h_2} =$



- A.  $\frac{r_2}{r_1}$                       B.  $(\frac{r_2}{r_1})^2$                       C.  $(\frac{r_2}{r_1})^3$                       D.  $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$
10. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(-x)$ , 且在  $[0, +\infty)$  上是增函数, 不等式  $f(ax + 2) \leq f(-1)$  对于  $x \in [1, 2]$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是
- A.  $[-\frac{3}{2}, -1]$                       B.  $[-1, -\frac{1}{2}]$                       C.  $[-\frac{1}{2}, 0]$                       D.  $[0, 1]$

11. 第七届世界军人运动会于 2019 年 10 月 18 日至 27 日在中国武汉举行, 中国队以 133 金 64 银 42 铜位居金牌榜和奖牌榜的首位. 运动会期间有甲、乙等五名志愿者被分配到射击、田径、篮球、游泳四个运动场地提供服务, 要求每个人都要被派出去提供服务, 且每个场地都要有志愿者服务, 则甲和乙恰好在同一组的概率是
- A.  $\frac{1}{10}$                       B.  $\frac{1}{5}$                       C.  $\frac{1}{40}$                       D.  $\frac{9}{40}$

12. 已知函数  $f(x) = ax^2 - x + \ln x$  有两个不同的极值点  $x_1, x_2$ , 若不等式  $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$  有解, 则  $t$  的取值范围是
- A.  $(-\infty, -2\ln 2)$   
B.  $(-\infty, -2\ln 2]$   
C.  $(-\infty, -11 + 2\ln 2)$   
D.  $(-\infty, -11 + 2\ln 2]$

## 第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 设非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 3|b|, \cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{3}, a \cdot (a - b) = 16$ , 则  $|b| =$   $\blacktriangle$ .
14. 设  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边. 已知  $A = \frac{\pi}{3}, b = 1$ , 且  $(\sin^2 A + 4\sin^2 B)c = 8(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)$ , 则  $a =$   $\blacktriangle$ .
15.  $(x^2 + 2)(2x - \frac{1}{x})^6$  的展开式中所有项的系数和为  $\blacktriangle$ , 常数项为  $\blacktriangle$ .  
(本题第一空 2 分, 第二空 3 分)
16. 过抛物线  $C: x^2 = 4y$  的准线上任意一点  $P$  作抛物线的切线  $PA, PB$ , 切点分别为  $A, B$ , 则  $A$  点到准线的距离与  $B$  点到准线的距离之和的最小值是  $\blacktriangle$ .

【高三数学试卷 第 2 页(共 4 页)理科】

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每道试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ , 且  $a_n-3a_{n+1}=a_n a_{n+1}+1$ .

(1)证明数列  $\{\frac{1}{a_n+1}\}$  是等差数列,并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2)若  $b_n=\frac{2^n}{a_n+1}$ ,求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (12 分)

某厂加工的零件按箱出厂,每箱有 10 个零件,在出厂之前需要对每箱的零件作检验,人工检验方法如下:先从每箱的零件中随机抽取 4 个零件,若抽取的零件都是正品或都是次品,则停止检验;若抽取的零件至少有 1 个至多有 3 个次品,则对剩下的 6 个零件逐一检验.已知每个零件检验合格的概率为 0.8,每个零件是否检验合格相互独立,且每个零件的人工检验费为 2 元.

(1)设 1 箱零件人工检验总费用为  $X$  元,求  $X$  的分布列;

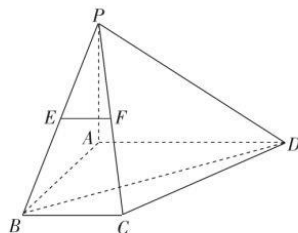
(2)除了人工检验方法外还有机器检验方法,机器检验需要对每箱的每个零件作检验,每个零件的检验费为 1.6 元.现有 1000 箱零件需要检验,以检验总费用的数学期望为依据,在人工检验与机器检验中,应该选择哪一个?说明你的理由.

19. (12 分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中, $PA \perp$  底面  $ABCD$ , $AD \parallel BC$ , $\angle ABC=90^\circ$ , $AB=BC=\frac{1}{2}AD$   
 $=\frac{1}{2}PB=2$ , $E$  为  $PB$  的中点, $F$  是  $PC$  上的点.

(1)若  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ,证明: $EF \perp$  平面  $PAB$ .

(2)求二面角  $B-PD-C$  的余弦值.



【高三数学试卷 第 3 页(共 4 页)理科】

20. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的左顶点为  $A$ , 右焦点为  $F$ , 斜率为 1 的直线与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $OB \perp AB$ , 其中  $O$  为坐标原点.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设过点  $F$  且与直线  $AB$  平行的直线与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 若点  $P$  满足  $\vec{OP} = 3\vec{PM}$ , 且  $NP$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $Q$ , 求  $\frac{|NP|}{|PQ|}$  的值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = ax^2 + ax + 1 - e^{2x}$ .

(1) 若函数  $g(x) = f'(x)$ , 试讨论  $g(x)$  的单调性;

(2) 若  $\forall x \in (0, +\infty), f(x) < 0$ , 求  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 已知曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 3 \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 6$ .

(1) 求曲线  $C$  的普通方程和直线  $l$  的直角坐标方程;

(2) 若射线  $m$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \geq 0)$ . 设  $m$  与  $C$  相交于点  $M$ ,  $m$  与  $l$  相交于点  $N$ , 求  $|MN|$ .

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

设函数  $f(x) = |\frac{1}{2}x + 1| + |x - 1| (x \in \mathbf{R})$  的最小值为  $m$ .

(1) 求  $m$  的值;

(2) 若  $a, b, c$  为正实数, 且  $\frac{1}{ma} + \frac{1}{2mb} + \frac{1}{3mc} = \frac{2}{3}$ , 证明:  $\frac{a}{9} + \frac{2b}{9} + \frac{c}{3} \geq 1$ .

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

**温馨提示：**

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>