

高三年级数学学科

命题：春晖中学 舟山中学 审核：丽水中学

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号；
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

选择题部分

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 + 2x - 3 > 0\}$ ，则 $A \cap B =$ (▲)

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 已知复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$ ，则 $z + 2\bar{z}$ 在复平面内所对应的点在 (▲)

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ，若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AD} =$ (▲)

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ D. $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

4. 已知函数 $y = \log_2(ax^2 - x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为 (▲)

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

5. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过点 $M(\sqrt{6}, 0)$ 的直线与抛物线相交于 A, B 两点，与抛物线的准线相交于点 C 。若 $|BF| = 3$ ，则 $\frac{|BC|}{|AC|} =$ (▲)

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{6}{7}$

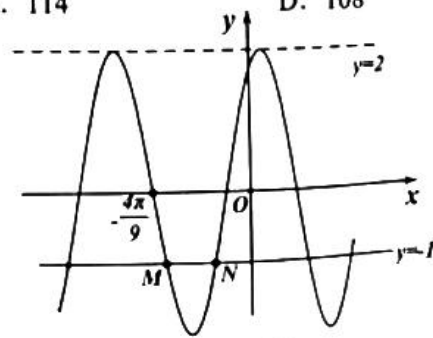
6. 某市抽调 5 位老师分赴 3 所山区学校支教，要求每位老师只能去一所学校，每所学校至少安排一位老师。由于工作需要，甲、乙两位老师必须安排在不同的学校，则不同的分派方法的种数是 (▲)

- A. 124 B. 246 C. 114 D. 108

7. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象如图所示， M, N 是直线 $y = -1$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点，

且 $|MN| = \frac{2\pi}{9}$ ，则 $f(\pi)$ 的值为 (▲)

- A. $\sqrt{2}$ B. -1
C. $-\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{3}$



第7题图

8. 已知四面体 $ABCD$ 中, $AD=2$, $BD=\sqrt{3}$, $\angle BCD=120^\circ$, 直线 AD 与 BC 所成的角为 60° , 且二面角 $A-CD-B$ 为锐二面角. 当四面体 $ABCD$ 的体积最大时, 其外接球的表面积为 (▲)

- A. $\frac{32\pi}{3}$ B. $\frac{16\pi}{3}$ C. 16π D. 8π

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的或不选的得 0 分.

9. 下列命题成立的是 (▲)

- A. 已知 $\xi \sim N(0,1)$, 若 $P(\xi > 1) = p$, 则 $P(-1 \leq \xi \leq 0) = \frac{1}{2} - p$
 B. 若一组样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 的对应样本点都在直线 $y = -2x + 3$ 上, 则这组样本数据的相关系数 r 为 -1
 C. 样本数据 64, 72, 75, 76, 78, 79, 85, 86, 91, 92 的第 45 百分位数为 78
 D. 对分类变量 X 与 Y 的独立性检验的统计量 χ^2 来说, χ^2 值越小, 判断“ X 与 Y 有关系”的把握性越大

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 为平面 ABC 内一动点, 则下列说法正确的是 (▲)

- A. 若点 P 在棱 AD 上运动, 则 $A_1P + PC$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$
 B. 若点 P 是棱 AD 的中点, 则平面 PBC_1 截正方体所得截面的周长为 $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$
 C. 若点 P 满足 $PD_1 \perp DC_1$, 则动点 P 的轨迹是一条直线
 D. 若点 P 在直线 AC 上运动, 则 P 到棱 BC_1 的最小距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 11. 设定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 若 $f(x+2) - g(1-x) = 2$, $f'(x) = g'(x+1)$, 且 $g(x+1)$ 为奇函数, 则下列说法中一定正确的是 (▲)
 A. $g(1) = 0$ B. 函数 $g'(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称
 C. $f(x)$ 的周期为 4 D. $\sum_{k=1}^{2023} g(k) = 0$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 $a_1 > 0$, 则下列叙述中正确的是 (▲)

- A. 若 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, 则 $q = 1$
 B. 若 $a_2 = \ln a_1 + \ln a_3$, 则 $q < 0$
 C. 若 $2a_3 = e^a + e^{a_3}$, 则 $q > 1$
 D. 若 $0 < a_1 < 1$, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = \ln(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, 则 $q > 1$

非选择题部分

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \in (-\infty, 1) \\ \log_4 x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, 则 $f(x) > 1$ 的解集为 ▲.

14. 若过点 $(2, 1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离为 ▲.

15. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点, 过 F 作直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则 $|AF| + 4|BF|$ 的最小值为 ▲.

16. 已知不等式 $x \ln x - m \ln x \geq x + n$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立. 则当 $\frac{n}{m}$ 取最大值时, $m =$ ▲.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

已知 $f(x) = \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

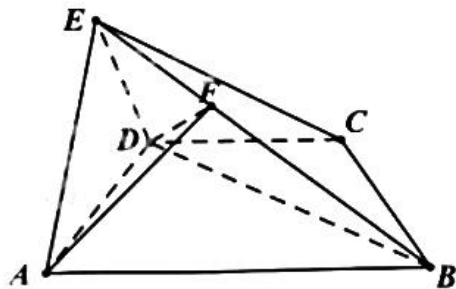
(2) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边为 a, b, c . 若 $f(A) = \frac{3}{2}$, $a = 2$, 求 $b + 2c$ 的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

已知四棱锥 $E-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形， $AB \parallel DC$, $AB = 4$, $AD = DC = 2$, $BE = 4$, $\triangle ADE$ 为等边三角形.

(1) 求证：平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 是否存在一点 F , 满足 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB}$ ($0 < \lambda < 1$), 使直线 AF 与平面 BDE 所成的角为 60° ? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



第18题图

19. (本题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_n = \frac{1}{2}(3a_n - 1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} n + a_n, & n \text{ 为奇数} \\ n \cdot a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 的项和 T_{2n} .

20. (本小题满分 12 分)

某研究所研究表明, 绝大部分抗抑郁抗焦虑的药物都有一个奇特的功效, 就是刺激人体大脑多巴胺(Dopamine)的分泌, 所以又叫“快乐药”. 其实科学、合理、适量的有氧运动就会增加人体大脑多巴胺(Dopamine)的分泌, 从而缓解抑郁、焦虑的情绪. 人体多巴胺(Dopamine)分泌的正常值是 $107.2-246.6\mu\text{g}/24\text{h}$, 定义运动后多巴胺含量超过 $400\mu\text{g}/24\text{h}$ 称明显有效运动, 否则是不明显有效运动. 树人中学为了了解学生明显有效运动是否与性别有关, 对运动后的 60 名学生进行检测, 其中女生与男生的人数之比为 $1:2$, 女生中明显有效运动的人数占 $\frac{1}{2}$, 男生中明显有效运动的人数占 $\frac{3}{4}$.

	女生	男生	合计
明显有效运动			
不明显有效运动			
合计			

(1) 根据所给的数据完成上表, 并依据 $\alpha = 0.100$ 的独立性检验, 能否判断明显有效运动与性别有关? 并说明理由.

(2) 若从树人中学所有学生中抽取 11 人, 用样本的频率估计概率, 预测 11 人中不明显有效运动的人数最有可能是多少?

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

参考数据:

$P(\chi^2 \geq \alpha)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A 、 B , P 为双曲线上异于 A 、 B 的任意一点, 直线 PA 、 PB 的斜率乘积为 $\frac{1}{3}$. 双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 1.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设不同于顶点的两点 M 、 N 在双曲线 C 的右支上, 直线 AM 、 BN 在 y 轴上的截距之比为 $1:3$. 试问直线 MN 是否过定点? 若是, 求出该定点坐标; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - e(x-1)^2$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. 其中 $a \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $ex_1 + (e-2)x_2 + 2(1-e) \geq \lambda(x_1-1)(x_2-1)$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.