浙江强基联盟 2022-2023 学年高三上学期 10 月统测数学试题

选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\left\{x\mid x^2-2x-8\leqslant 0\right\}, B=\{x\mid x>1\}$，则 $A\cap B=$（）

A.$\varnothing$　　B.$\left\{x\mid x\leqslant 4\right\}$　　C.$\{x\mid 1<x\leqslant 4\}$　　D.$\{x\mid x>-2\}$

2.若 $-\mathrm{i}(z+\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$（）

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{10}$　　C.2　　D.10

3.已知一个圆锥的侧面展开图是半径为 2 且面积为 π 的扇形，则这个圆锥的底面半径为（）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2

4.甲、乙两人到一商店购买饮料，他们准备分别从加多宝、农夫山泉、雪碧这 3 种饮品中随机选择一种，且两人的选择结果互不影响.记事件 $A=$“甲选择农夫山泉”，事件 $B=$“甲和乙选择的饮品不同”，则 $P(B\mid A)=$（）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

5.对于非零平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，“$\vec{a}=\lambda\vec{c}(\lambda\in R)$”是“$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$”的（）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.用一架两臂不等长的天平称黄金，先将 5g 的砝码放在天平左盘中，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将 5g 的砝码放在天平右盘中，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡，则两次共称得的黄金（）

A.大于 10g　　B.等于 10g　　C.小于 10g　　D.无法确定

7.设 $a=0.98+\sin 0.01, b=\mathrm{e}^{-0.01}, c=\frac{\log_{2021}2022}{\log_{2022}2023}$，则（）

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$　　C.$c>a>b$　　D.$c>b>a$

8.过抛物线 $x^2=4y$ 上一点 P 作其切线，该切线交准线 l 于点 $M, PN\perp l$，垂足为 N，抛物线的焦点为 F，射线 PF 交 l 于点 Q，若 $|MP|=|MQ|$，则 $|MN|=$（）

A.4　B.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　C.2　D.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.某公司为了增加某商品的销售利润，调查了该商品投入的广告费用 x（万元）与销售利润 y（万元）的统计数据，如下表，由表中数据，得回归直线 l：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}x$，则下列结论正确的是（）

广告费用 x / 万元	3	4	6	7
销售利润 y / 万元	6	8	10	12

A.$\hat{b}$>0B.$\hat{a}$>0C.直线 l 必过点 $(5,9)$ D.直线 l 必过点 $(3,6)$

10.若函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调，则 ω 的取值可以是（）

A.1B.$\frac{5}{2}$ C.4D.$\frac{11}{2}$

11.将两圆方程 $C_1: x^2+y^2+2x-4y+4=0, C_2: x^2+y^2-2x+(m-2)y+(3-m)=0(m>2)$ 作差，得到直线 l 的方程，则（）

A.直线 l 一定过点 $\left(-\frac{1}{4},1\right)$

B.存在实数 $m>2$，使两圆心所在直线的斜率为 -2

C.对任意实数 $m>2$，两圆心所在直线与直线 l 垂直

D.过直线 l 上任意一点一定可作两圆的切线，且切线长相等

12.已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y-1)$，且当 $x>1$ 时，$f(x)>1$，则（）

A.$f(1)=1$ B.$f(x)$ 的图象关于点 $(1,f(1))$ 中心对称

C.$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调 D.当 $x<1$ 时，$0<f(x)<1$

非选择题部分

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

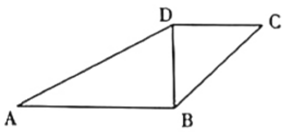
13.$(2x+y)^5$ 的展开式中含 x^3y^2 的项的系数为____________.（用数字作答）

2 官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

14.已知奇函数，$f\left(x\right)=\begin{cases}x\left(x+1\right), x\geq 0,\\ x\left(ax+b\right), x<0,\end{cases}$ 且 $f\left(a\right), f\left(b\right), f\left(c\right)$ 成等差数列，则 $c=$____________.

15.若直线 l 与单位圆和曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 均相切，则直线 l 的方程可以是____________.（写出符合条件的一个方程即可）

16.如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BD, CD\perp BD, \angle BAD=30^{\circ}$，$\angle BCD=45^{\circ}$，且 $CD=1$，将 ABD 沿 BD 所在直线翻折，得到三棱锥 $A-BCD$，已知该三棱锥的顶点均在同一个球 O 的表面上，则球 O 体积的最小值为____________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{3}$，且满足 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{4a_n+1}$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-2\right\}$ 是等比数列.

（2）若 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2022$，求正整数 n 的最大值.

18.（12 分）

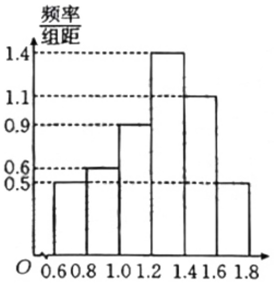
在锐角 ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $\sin^2A-\sin^2B=\sin B\sin\left(A+B\right)$.

（1）证明：$A=2B$.

（2）求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

19.（12 分）

盐水选种是古代劳动人民的智慧结晶，其原理是借助盐水估测种子的密度，进而判断其优良.现对一批某品种种子的密度（单位：g/cm^3）进行测定，认为密度不小于 1.2 的种子为优种，小于 1.2 的为良种.自然情况下，优种和良种的萌发率分别为 0.8 和 0.6.



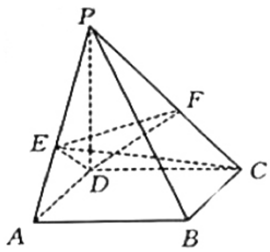
（1）若将这批种子的密度测定结果整理成频率分布直方图，如图所示，据图估计这批种子密度的平均值；（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

（2）在（1）的条件下，用频率估计概率，从这批种子（总数远大于 2）中选取 2 粒在自然情况下种植，设萌发的种子数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望（各种子的萌发互相独立）；若该品种种子的密度 $\rho\sim N\left(1.3,0.01\right)$，任取该品种种子 20000 粒，估计其中优种的数目.附：假设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则

$P\left(\mu-\sigma \bullet X \bullet \mu+\sigma\right)\approx 0.6827, P\left(\mu-2\sigma \bullet X \bullet \mu+2\sigma\right)\approx 0.9545$.

20.（12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形，侧面 PCD 与底面 $ABCD$ 垂直，点 E,F 分别在侧棱 PA,PC 上，满足 $DE\perp PA,DF\perp PC,PD=CD=2AD=4,PB=6$.



（1）证明：$PB\perp EF$.

（2）求二面角 $D-EF-C$ 的正弦值.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right)$, $F_1\left(-2,0\right),F_2\left(2,0\right)$ 为其左、右焦点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）P 为第一象限内椭圆 C 上的一点，直线 PF_1,PF_2 与直线 $x=5$ 分别交于 A, B 两点，记 PAB

和 PF_1F_2 的面积分别为 S_1,S_2，若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{25}{9}$，求 $\frac{|PA|\cdot|PF_1|}{|PB|\cdot|PF_2|}$ 的值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax-a^2\ln x(a\neq 0)$，存在实数 $a_1,a_2(a_1<a_2)$，当 a 分别取 a_1,a_2 时，$f(x)$ 有相同的极值点和极值.

（1）求 a_1,a_2；

（2）若 $a=a_2$，设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $(t,g(t))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 交于另一点，求 t 的取值范围.

自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw

浙江强基联盟2022年10月高三试题解析

1.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第1题）

解析：$A=\{x|\ x\geq 4或x\leq -2\}, A\cap B=\{x|\ x\geq 4\}$，故选B.

2.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第2题）

解析：由$-\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，得$z=-1+\mathrm{i}, \overline{z}=-1-\mathrm{i}\Rightarrow z\cdot\overline{z}=1+1=2$，故选C.

3.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第3题）

解析：$S_{扇形}==\frac{1}{2}l\cdot R=l=\pi$，则$C_{圆}=2\pi r=\pi\Rightarrow r=\frac{1}{2}$，故选$B$

4.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第4题）

解析：得本题可以缩小样本空间方法解决条件概率同，在A事件已经发生的情况下，有加多宝、农夫山泉、雪碧这3种饮品三种选择，而其中B事件发生的事件为加多宝、雪碧两种选择，所以$P(B|\ A)=\frac{2}{3}$，故选D

5.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第5题）

解析：显然$\vec{a}=\lambda\vec{c}(\lambda\in R)$能推出$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$成立，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$成立，取特殊情况，$\vec{c}=\vec{0}, \vec{a}\perp\vec{b}$且不为$\vec{0}$，显然$\vec{a}=\lambda\vec{c}(\lambda\in R)$不成立，故选A.

6.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第6题）

解析：设左右两臂的长度为a,b，两次取的黄金重量为x,y克，显然$x\neq y$，则$5a=bx, ay=5b$，消掉a,b，可得$xy=25\Rightarrow x+y>2\sqrt{xy}=10$，故选**C**

7.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第7题）

解析：$a>b>c$由$x>\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$可得，$a=0.98+\sin 0.01<0.98+0.01=0.99$

由切线不等式$e^x>x+1(x>0)$可得，$b=\mathrm{e}^{-0.01}>-0.01+1=0.99$，显然$b>a$

因$b=\mathrm{e}^{-0.01}<\mathrm{e}^0=1, c=\frac{1}{2}(\log_{2022}2023+\log_{2023}2022)>\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\log_{2022}2023\cdot\log_{2023}2022}=1$

所以$c>b$，综合可得$c>b>a$.

8.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第8题）解析：设$p(x_0,y_0)$，则

$$l_{PM}: x_0x=2y+2y_0\ \therefore m\left(\frac{2y_0-2}{x_0},-1\right)$$

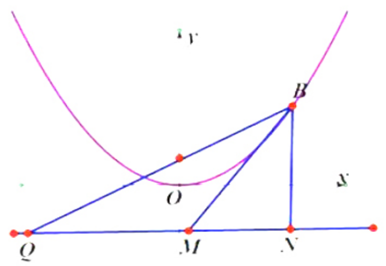
$$l_{PQ}: y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1,\therefore N\left(\frac{-2x_0}{y_0-1},-1\right)$$

$\therefore |MN| = \dfrac{2y_0 - 2}{x_0} + \dfrac{2x_0}{y_0 - 1} = \dfrac{2(y_0+1)^3}{x_0(y_0-1)}$

$\therefore |pm| = \sqrt{1+\dfrac{4}{x_0^2}}|y_0+1| = \dfrac{2\sqrt{y_0+1}\cdot(y_0+1)}{x_0}$

$|MN| = |PM| \Rightarrow y_0 = 3$ 或 $y_0 = 0$(舍)$\therefore p(2\sqrt{3},3)$

$\therefore x_M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, x_N = 2\sqrt{3} \therefore |MN| = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$



9.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 9 题）

解析：由表中数据易知$b>0$，又$\bar{x} = \dfrac{3+4+6+7}{4} = 5, \bar{y} = \dfrac{6+8+10+12}{4} = 9$，所以直线$l$必过点$(5,9)$，通过数据也可观测回归直线与$y$轴截距是大于 0 的，故$\hat{a}>0$，所以答案为 ABC．

10.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 10 题）

解析 1：$x \in \left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\omega x + \dfrac{\pi}{2}\right) \in \left(\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$，因在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调，

所以$\left(\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right) \in [2k\pi, \pi+2k\pi]$或$\left(\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right) \in [\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$

将四个选项代入，$\omega=1$时，$\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right) \in [0,\pi]$满足，$\omega=\dfrac{5}{2}$时，$\left(\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{8\pi}{6}\right)$不满足，

$\omega=4$时，$\left(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right) \in [\pi, 2\pi]$满足，当$\omega=\dfrac{11}{2}$时，$\left(\dfrac{17\pi}{12},\dfrac{14\pi}{6}\right)$不满足

综上可知，选A,C

解析 2：$f(x) = \cos\left(\omega x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\omega x, \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}, \omega > 0$

$\frac{\pi}{6}\omega<\omega x<\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\omega\le\pi,\Rightarrow\frac{\pi}{3}\omega\le 2\pi$

$\therefore 0<\frac{\pi}{3}\omega\le\frac{\pi}{2}$ 或 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega\ge\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{3}\omega\le\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$

$\Rightarrow 0<\omega\le\frac{3}{2}$ 或 $3\le\omega\le\frac{9}{2}$，故选 A，C

11.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 11 题）

解析：直线 l 的方程为：$4x-(m+2)y+m+1=0$

分参可得 $m(1-y)+4x-1=0$，得直线 l 一定过点 $\left(\frac{1}{4},1\right)$，所以 A 错误，

$C_1(-1,2),C_2\left(1,1-\frac{m}{2}\right)\Rightarrow k_{C_1C_2}=-\frac{1}{2}-\frac{m}{4}=-2\Rightarrow m=6$，所以 B 正确，

因 $k_l=\frac{4}{m+2},k_{C_1C_2}=-\frac{m+2}{4}\Rightarrow k_lk_{C_1C_2}=-1\Rightarrow l\perp C_1C_2$，所以 C 正确，

D 选项，硬算切线长，计算量相当大，这里就不写了，D 正确，（高航老师说可以用根轴）以后用专题解决此问题，时间关系，这里忽略了.

所以选 B,C,D

12.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 12 题）

解析 1：取特殊函数

取函数 $f(x)=e^{x-1}$ 符合题意，验证 A，D 正确，B，C 错误，故选 A,D

解析 2：抽象函数运算

令 $x=1,y=2$，可得 $f(1)\cdot f(2)=f(2)$，因 $f(2)>1$，所以 $f(1)=1$，A 正确令

$x=\frac{x+1}{2},y=\frac{x+1}{2}$ 可得 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x)>0$

设 $x_1<x_2$，令 $x=x_1,x+y-1=x_2\Rightarrow y=x_2-x_1+1>1$

所以 $f(x_1)\cdot f(x_2-x_1+1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2-x_1+1)>1$，即 $f(x_1)<f(x_2)$

即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 **C** 错误

令 $x=0,y=2$，可得 $f(0)\cdot f(2)=f(1)=1$，因 $f(0)<f(2)$

所以$\dfrac{f(0)+f(2)}{2}>\sqrt{f(0)\cdot f(2)}=1=f(1)$，所以$f(x)$的图象关于点$(1,f(1))$没有中心对称，

所以B错误

当$x<1$时，令$x=x,y=2-x>1$，此时$f(x)\cdot f(2-x)=f(1)=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(2-x)}$，

因$f(2-x)>1$，所以$f(x)=\dfrac{1}{f(2-x)}\in(0,1)$，所以$D$正确

综上所述：选A，D

13.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第13题）

解析：系数为$C_5^3 2^3=80$

14.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第14题）

解析：由奇函数可知$x<0,f(x)=-f(-x)=x(1-x)$，则$a=-1,b=1,f(-1)=-2,f(1)=2$，

则$f(c)=6$，由函数单增，则存在唯一的$c=2$满足.

15.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第15题）

解析：设直线方程为$y=kx+m$，因直线$Ax+By+C=0$与$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$联立判别式

$$=A^2a^2+B^2b^2-C^2,\text{则}\begin{cases}k^2+1=m^2\\16k^2-4=m^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2=\dfrac{1}{3}\\m^2=\dfrac{4}{3}\end{cases},\text{则}y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$$

16.（2022年10月浙江强基联盟高三试题解析第16题）

解析：如图1，ABD，BCD外接圆圆心分别为斜边中点E,F，则分别过圆心作相应平面垂线，交点为球心$O,R=\sqrt{OE^2+EA^2}=\sqrt{OE^2+1}$，如图2，因$GF=\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=EG,F$可看成以$G$为圆心的圆，显然$O$可以与$E$重合，则$R_{\min}=1,V_{\min}=\dfrac{4}{3}\pi$

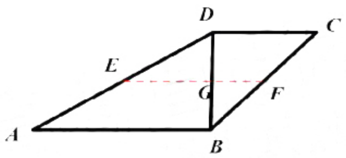


图1

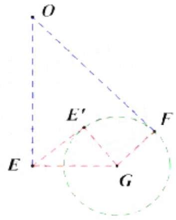


图2

17.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 17 题）

解析：（1）易知$\{a_n\}$各项均为正，

对$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{4a_n+1}$两边同时取倒数得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{4}{3}$，

即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n}-2\right)$，因为$\dfrac{1}{a_1}-2=1$，

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-2\right\}$是以 1 为首项，$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列.

（2）由（1）知$\dfrac{1}{a_n}-2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$，即$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3^{n-1}}+2$，

所以$f(n)=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\dfrac{1}{3}}+2n=2n+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，

显然$f(n)$单调递增，因为

$f(1010)=2021.5-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{3^{1010}}<2022, f1011=2023.5-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{1011}}>2022$，所以$n$的最大值为 1010.

18.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 1 题）

解析：（1）由$\sin^2A-\sin^2B=\sin B\cdot\sin(A+B)$得

$\sin^2A-\sin^2B=\sin B\sin C$，由正弦定理得$a^2-b^2=bc$

故$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{c^2-bc}{2bc}=\dfrac{c-b}{2b}=\dfrac{\sin C-\sin B}{2\sin B}$，可得$2\sin B\cos A=\sin(A+B)-\sin B$

即$\sin B=\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin(A-B)$，

因为$0<A<\dfrac{\pi}{2}, 0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $B=A-B$，即 $A=2B$；

（2）$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin B}{\sin(\pi-3B)}=\dfrac{\sin B}{\sin 3B}=\dfrac{\sin B}{\sin 2B\cos B+\cos 2B\sin B}$

$=\dfrac{\sin B}{2\sin B\cos^2 B+(2\cos^2 B-1)\sin B}=\dfrac{1}{4\cos^2 B-1}$，

在锐角 ABC 中，$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，$\Rightarrow \dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{4\cos^2 B-1}\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

19.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 19 题）

解析：（1）平均数 $=0.7\times0.5+0.9\times0.6+1.1\times0.9+1.3\times1.4+1.5\times1.1+1.7\times0.5=1.24$

（2）良种占比为 $(1.4+1.1+0.5)\times0.2=\dfrac{3}{5}$ 任选一粒种子萌发的概率

$p=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}+\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{25}$ 为这批种子总数远大于 2，所以 $X\sim B(2,p)$ 以 X 布列为

X		1	2
P	$\dfrac{49}{625}$（即.0784）	$\dfrac{252}{625}$（即 0.4032）	$\dfrac{324}{625}$（即 0.5184）

期望 $E(X)=2p=\dfrac{36}{25}$（即 1.44）

（3）$\mu=1.3$ 以 20000 粒种子中约有良种 $20000\times\left(0.5+\dfrac{0.6827}{2}\right)=827$（粒）

20.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 20 题）

解析：（1）$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$（交线为 CD），$BC\perp CD$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PCD，$\because BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PCD（交线为 PC），$\therefore DF\perp CP$，

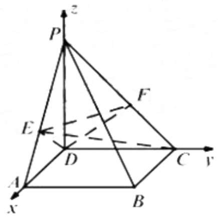
$\therefore DF\perp$ 平面 BCP，$\therefore DF\perp PB$；

$\because PD^2+BD^2=36=PB^2$，$\therefore PD\perp BD$，又 $BC\perp PD,BC\cap BD=B$

$\therefore PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\because PD\subset$ 平面 PAD，$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$（交线为 AD），

同理可得 $DE \perp PB$，

又 $DE \cap DF = D, \therefore PB \perp$ 平面 $DEF, \therefore PB \perp EF$.



（2）【方法一】（几何法）作 $PH \perp EF$，垂足为 H，在 PEF 中，$PE = \frac{8}{5}\sqrt{5}$，

$EF = PF = 2\sqrt{2}$

PE 边上的高 $(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{2}{5}\sqrt{30}$，所以 $PH = \frac{PE \cdot \frac{2}{5}\sqrt{30}}{EF} = \frac{8}{5}\sqrt{3}$，

所以二面角 $D-EF-C$ 的正弦值为 $\frac{h}{PH} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$，二面角 $D-EF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

【方法二】（坐标法）设平面 CEF 即平面 PAC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z), \overrightarrow{PA} = (2, 0, -4)$，

$\overrightarrow{PC} = (0, 4, -4)$，

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$，取 $\vec{n} = (2, 1, 1)$，所以 $\left|\cos\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \right\rangle\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{9}$，

所以二面角 $D-EF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

21.（2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 21 题）

解析：（1）设椭圆焦距为 $2c(c>0), c^2 = a^2 - (a^2 - 4) = 4, c = 2$，所以 $F_1(-2, 0)$，

$F_2(2, 0), 2a = \sqrt{\left(\frac{5}{4}+2\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = 2\sqrt{10}, a = \sqrt{10}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$.

设 $P(x_0, y_0)(x_0, y_0 > 0)$，则 $k^2 = \frac{(x_0 - 2)^2 + y_0^2}{(x_0 - t)^2} = \frac{x_0^2 - 4x_0 + 4 + y_0^2}{x_0^2 - 2tx_0 + t^2}$，因为 $\frac{x_0^2}{10} + \frac{y_0^2}{6} = 1$，

所以 $k^2=\dfrac{\frac{2}{5}x_0^2-4x_0+10}{x_0^2-2tx_0+t^2}$，因为 k 为定值，所以 $\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{2t}=\dfrac{10}{t^2}$，解得得 $t=5,k=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；

（2）由 $F_1(-2,0),P(x_0,y_0)$ 得直线 $PF_1:y_0x-(x_0+2)y+2y_0=0$，所以 $A\left(5,\dfrac{7y_0}{x_0+2}\right)$，

同理得 $B\left(5,\dfrac{3y_0}{x_0-2}\right),|AB|=\left|\dfrac{7y_0}{x_0+2}-\dfrac{3y_0}{x_0-2}\right|=\left|\dfrac{4y_0-20x_0y_0}{x_0^2-4}\right|$，所以

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|AB|(5-x_0)}{2y_0}=\frac{(5-x_0)^2}{|x_0^2-4|}=\frac{25}{9},$$

化简得 $16x_0^2+90x_0-325=0$ 或 $34x_0^2-90x_0+125=0$，

解第一个方程：$(2x_0-5)(8x_0+65)=0$，得 $x_0=\dfrac{5}{2}$；第二个方程无实根.

【方法一】（距离公式）所以 $P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right),A\left(5,\dfrac{7}{3}\right),B(5,9),|PF_1|=\dfrac{3}{2}\sqrt{10},|PF_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$，

$|PA|=\dfrac{5}{6}\sqrt{10},|PB|=\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$,所以 $\dfrac{|PA|\cdot|PF_1|}{|PB|\cdot|PF_2|}=1$。

【方法二】（相似三角形）因为 $k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=\dfrac{y_0}{x_0+2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}=1$，

所以 $\angle PF_1F_2=\angle PBA$.所以 $PAB\sim PF_1F_2$，

所以 $\dfrac{|PA|\cdot|PF_1|}{|PB|\cdot|PF_2|}=1$.

22.2022 年 10 月浙江强基联盟高三试题解析第 22 题）

解析：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x-a)}{x}=0$，得 $x=-\dfrac{a}{2}$ 或 $x=a$，

显然 $a_1<0<a_2$，当 a 分别取 a_1,a_2 时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 随 x 的变化如下表：

x	$\left(0,-\frac{a_1}{2}\right)$	$-\frac{a_1}{2}$	$\left(0,-\frac{a_1}{2}\right)$	x	$(0,a_2)$	a_2	$(0,-a_2)$
$f'(x)$	−	0	+	$f'(x)$	−	0	+

$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

$a=a_1$ $a=a_2$

由题意，

$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{2}=a_2 \\ f\left(-\dfrac{a_1}{2}\right)=f(a_2) \end{cases},$$

解得 $a_1=-2e,a_2=e$;

（2）若 $a=a_2=\mathrm{e},g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x-\mathrm{e}-\mathrm{e}^2\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,

$g'(x)=1-\mathrm{e}^2\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$

曲线 $g(x)$ 在 $(t,g(t))$ 处的切线方程为 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$，

因为切线与曲线 $g(x)$ 交于另一点，

所以方程 $g(x)-g(t)=g'(t)(x-t)$ 有两个正实根，

整理得 $\dfrac{\ln t-1}{t^2}x+\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2\ln t-1}{t}=0$，

设 $h(x)=\dfrac{\ln t-1}{t^2}x+\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2\ln t-1}{t}$，显然 $h(t)=0$，

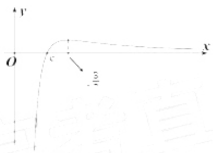
$h'(x)=\dfrac{\ln t-1}{t^2}-\dfrac{\ln x-1}{x^2}$，显然 $h'(t)=0$，

设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2},\varphi'(x)=\dfrac{x(3-2\ln x)}{x^4}$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ 上单调递减，

当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to 0$，

据此作出 $\varphi(x)$ 的大致图象如图：



由图可知：

①当 $0<t\le \mathrm{e}$ 时，$h'(x)=\varphi(t)-\varphi(x)$ 在 $(0,t)$ 上为正，

在 $(t,+\infty)$ 上为负，所以 $h(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递增，在

$(t,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)$ 有极大值 $h(t)=0$，有唯一实根 t，不合题意；

②当 $t=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$h'(x)\ge 0, h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，有唯一实根 t，不合题意；

③当 $\mathrm{e}<t<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$\exists x_0\in\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$，使得 $\varphi(x_0)=\varphi(t)$，即 $h'(x_0)=0, h(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递增，

在 (t,x_0) 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $h(t)=0$，所以 $h(x_0)<0$，又当

$x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，所以 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上存在另一个实根，符合题意；

改：又 $h\left(\frac{\mathrm{e}^3}{t-\mathrm{e}}\right)=\frac{(\ln t-1)\mathrm{e}^3}{t^2(t-\mathrm{e})}+\frac{[3-\ln(t-\mathrm{e})](t-\mathrm{e})}{\mathrm{e}^3}-\frac{2\ln t-1}{t}>0\left(\mathrm{e}<t<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(x_0,\frac{\mathrm{e}^3}{t-\mathrm{e}}\right)$ 存在另一个实根，符合题意；

④当 $t>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$\exists x_0\in\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$，使得 $h'(x_0)=0, h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,t) 上单调递减，

在 $(t,+\infty)$ 上单调递增，因为 $h(t)=0$，所以 $h(x_0)>0$，又当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上存在另一个实根，符合题意；

改：又 $h(1)=\frac{\ln t-1}{t^2}-\frac{2\ln t-1}{t}<0\left(t>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 存在另一个实根，符合题意；

综上，t 的取值范围为 $\left(e,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线