内部资料·注意保存 试卷类型：A

江门市2023届普通高中高三调研测试

数 学

本试卷共6页，22小题，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 做选择题时，必须用2B铅笔将答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须用黑色字迹钢笔或签字笔，将答案写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上作答无效。
5. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，$B=\{x\in N_+|x^2-2x\le 3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1\le x\le 3\}$ B. $\{x|0\le x\le 3\}$ C. $\{1,2,3\}$ D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知 $p:x+y\ne 4$，$q:x,y$ 不都是2，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $a=\sqrt{c+3}+\sqrt{c+4}$，$b=\sqrt{c+2}+\sqrt{c+5}$，则

A. $a>b>1$ B. $b>a>1$ C. $a>1>b$ D. $b>1>a$

4. 已知函数 $f(x)=x^2(e^x-e^{-x})+2$，若 $f(t)=4$，则 $f(-t)$ 的值为

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

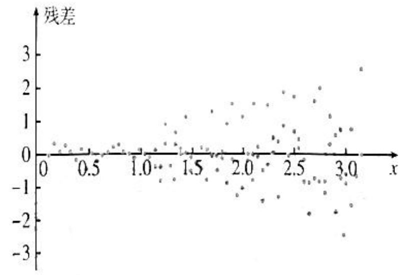
5. 在 $(x^2+x+1)\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中常数项为

A. 14 B. -14 C. 6 D. -6

6. 在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边长分别为 a，b，c，且 $\tan A+3\tan(A+B)=0$，$a^2-c^2=2b$，则 b 的值为

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

7. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 得到经验回归模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$，对应的残差如图所示，



则模型误差

$A.$ 满足一元线性回归模型的所有假设

$B.$ 不满足一元线性回归模型的 $D(e) = \sigma^2$ 的假设

$C.$ 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 的假设

$D.$ 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 和 $D(e) = \sigma^2$ 的假设

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = -a_n^2 + a_n \left(n \in N_{-}\right), a_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，则下列结论中错误的是

$A.$ $0 < a_{n+1} < a_n$　　$B.$ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 < 1$　　$C.$ $a_n < \frac{1}{n}$　　$D.$ $a_n > \frac{1}{n+2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 满足 $f(1+x) = f(1-x)$，且当 $x \in [1, +\infty)$ 时，$f(x) = x^2$，则下列说法正确的是

$A.$ $f(0) = 0$　　$B.$ 当 $x \in (-\infty, 1]$ 时，$f(x) = (x-2)^2$

$C.$ 函数 $y = f(1-x)$ 为偶函数　　$D.$ 不等式 $f(x) \le 4$ 的解集是 $\{x | -2 \le x \le 2\}$

10. 下列说法正确的是

$A.$ 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，若函数 $f(x) = P(x \le \xi \le x+1)$ 为偶函数，则 $\mu = \frac{1}{2}$

$B.$ 数据 7, 5, 3, 10, 2, 6, 8, 9 的上四分位数为 8

$C.$ 已知 $0 < P(M) < 1$，$0 < P(N) < 1$，若 $P(M|N) + P(\overline{M}) = 1$，则 M, N 相互独立

$D.$ 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 3.937$ 依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验 $\left(X_{0.05} = 3.841\right)$，可判断 X 与 Y 有关且犯错误的概率不超过 0.05

11. 大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传"大衍之数五十"的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项都代表太极衍生过程. 已知大衍数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n+1(n\text{为奇数})\\a_n+n(n\text{为偶数})\end{cases}$，则

A. 当n为偶数时，$a_n=\dfrac{n^2}{2}$　　　　B. 当n为奇数时，$a_n=\dfrac{n^2-1}{2}$

C. $a_{n+2}=a_n+2n$　　　　D. 数列$\{(-1)^{n-1}a_n\}$的前$2n$项和为$n(n+1)$

12. 已知函数$f(x)=|\sin x|$，$g(x)=kx(k>0)$，若$f(x)$与$g(x)$图像的公共点个数为n，且这些公共点的横坐标从小到大依次为x_1，x_2，…，x_n，则下列说法正确的有

A. 若$n=1$，则$k>1$　　　　B. 若$n=3$，则$\dfrac{2}{\sin 2x_3}=x_3+\dfrac{1}{x_3}$

C. 若$n=4$，则$x_1+x_4<x_2+x_3$　　　　D. 若$k=\dfrac{2}{2023\pi}$，则$n=2024$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 直线方程$Ax+By=0$，若从 1,2,3,4 这四个数字中每次取两个不同的数作为系数A,B的值，则方程表示不同直线的条数是________.

14. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为45°，且$|\vec{a}|=1,|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|$的值是________.

15. 已知$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值为________.

16. 已知指数函数$f(x)=a^x$（$a>0$，且$a\neq1$）图像与其反函数的图像有公共点，则a的取值范围是________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 2.

（1）求实数 a，b 的值；

（2）若 $x\in\left[-2,\dfrac{1}{2}\right]$，函数 $g\left(x\right)=m-f(x)$ 有零点，求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）

在一个文艺比赛中，由10名专业评审、10名媒体评审和10名大众评审各组成一个评委小组，给参赛选手打分. 打分均采用100分制，下面是三组评委对选手小明的打分：

小组 A	85	91	87	93	88	84	97	94	95	86
小组 B	84	87	92	96	89	95	92	91	94	90
小组 C	95	89	95	96	97	93	92	90	89	94

（1）选择一个可以度量每一组评委打分相似性的量，并对每组评委的打分计算度量值；

（2）你能依据（1）的度量值判断小组 A，B 与 C 中哪一个更像是由专业人士组成的吗？

（3）已知选手小华专业评审得分的平均数和方差分别为 $\overline{x_1}=95, S_1^2=8$，媒体评审得分的平均数和方差分别为 $\overline{x_2}=93, S_2^2=12$，大众评审得分的平均数和方差分别为 $\overline{x_3}=91$，$S_3^2=20$，将这 30 名评审的平均分作为最终得分，求该选手最终的得分和方差.

19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{4}{5}$，且满足$a_{n-1}=\dfrac{4a_n}{3a_n+1}(n\in N_+)$.

(1)求证：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列；

(2)若$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<100$，求满足条件的最大整数$n$.

20.（12 分）

在ΔABC中，内角A，B，C的对边长分别为a，b，c，设S为ΔABC的面积，满足$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+c^2-b^2\right)$.

（1）求角B的大小；

（2）若ΔABC为锐角三角形，其外接圆半径为$\sqrt{3}$，求ΔABC周长的取值范围.

21.（12 分）

通过验血能筛查乙肝病毒携带者，统计专家提出一种β化验方法：随机地按k人一组进行分组，然后将每组k个人的血样混合化验．如果混合血样呈阴性，说明这k人全部阴性；如果混合血样呈阳性，说明这k人中至少有一人血样呈阳性，需要重新采集这k人血样并分别化验一次，从而确定乙肝病毒携带者．

（1）已知某单位有 1000 名职工，假设其中有 2 人是乙肝病毒携带者，如果将这 1000 人随机分成 100 组，每组 10 人，且每组都采用β化验方法进行化验．（i）若两名乙肝病毒携带者被分到同一组，求本次化验的总次数；（ii）假设每位职工被分配到各组的机会均等，设X是化验的总次数，求X的分布列与数学期望EX．

（2）现采用β化验方法，通过验血大规模筛查乙肝病毒携带者．为方便管理、采样、化验，每组人数宜在 10 至 12 人之间．假设每位被筛查对象的乙肝病毒携带率均为2%，且相互独立，每组$k\left(k\in N_{+},10\le k\le 12\right)$人．设每人平均化验次数为$Y$，以$Y$的数学期望$EY$为依据，确定使化验次数最少的$k$的值．

参考数据：$0.98^{10}\approx 0.82$，$0.98^{11}\approx 0.80$，$0.98^{12}\approx 0.78$，数据保留两位小数．

22.（12 分）

已知函数$f(x)=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\ln x+\dfrac{1}{x}-x\left(a>0\right)$，函数$g(x)$是定义在$\left(0,+\infty\right)$的可导函数，其导数为$g'\left(x\right)$，满足$0<g(x)<-g'\left(x\right)$．

（1）令函数$G(x)=e^{x}g\left(x\right)$，求证：$G(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上是减函数；

（2）若$f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，求实数a取值范围；

（3）对任意正数x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，试比较$x_1^2 g\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$与$x_2^2 g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$的大小．

江门市 2023 年普通高中高三调研测试

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	B	D	C	B	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	AB	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	10	5	$-\frac{7}{9}$	$(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$

注：16 题若出现$(0,1)$但答案不正确，给 1 分；出现$\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$，但答案不正确，给 3 分；全对给 5 分，结果可以用集合标示。

8. $\because a_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\therefore a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0$，$a_{n+1}<a_n$，又$\because a_{n+1}=-\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$，选项$A$正确。

$a_n^2=a_n-a_{n+1}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i-a_{i+1}\right)=a_1-a_{n+1}<a_1<1$，选项$B$正确。

由$a_2=-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$a_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，得$0<a_2<\frac{1}{4}$，选项$D$不正确。

故选D

当然，对于C选项，可以用数学归纳法证明其正确（仅供教师和学生参考）

下面用数学归纳法证明$a_n<\frac{1}{n}$，$a_1<1$，$a_2=-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$，设$a_k<\frac{1}{k}(k\ge 2)$，则

$\because a_{k+1}=-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}<-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k^2}<\frac{k-1}{k^2-1}=\frac{1}{k+1}$，选项$C$正确。

12. 对于A：当$k=1$时，$f(x)$与$g(x)$也恰有一个公共点，故A错误；

对于 B：当 $n=3$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 图像相切，故 $\begin{cases} k=-\cos x_3 \\ -\sin x_3 = kx_3 \end{cases}$，从而 $x_3=\tan x_3$，所以

$\frac{1}{x_3}+x_3=\tan x_3+\frac{1}{\tan x_3}=\frac{1+\tan^2 x_3}{\tan x_3}=\frac{\cos^2 x_3\left(1+\tan^2 x_3\right)}{\cos^2 x_3\tan x_3}=\frac{2}{\sin 2x_3}$，故 B 正确；

对于 C：当 $n=4$ 时，$x_1=0,\pi<x_4<2\pi$，所以 $x_1+x_4<2\pi$，又 $f(x)$ 图像关于 $x=\pi$ 对称，结合图像

有 $x_3-\pi>\pi-x_2$，即有 $x_3+x_2>2\pi>x_1+x_4$，故 C 正确；

对于 D：当 $k=\frac{2}{2023\pi}$ 时，$f(\frac{2023\pi}{2})=g\left(\frac{2023\pi}{2}\right)=1$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在 y 轴右侧的前 1012 个

周期中，每个周期均有 2 个公共点，共有 2024 个公共点，故 D 正确；

16. 由于 $f\left(x\right)$ 与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称，所以问题转化为 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=x$ 在第一象限有公共点，令 $g\left(x\right)=a^x-x$，则问题转化为 $g\left(x\right)$ 有正零点，

$g'\left(x\right)=a^x\ln a-1$，

①当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，从而 $g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递减，

又 $g\left(0\right)=1>0$，$g\left(1\right)=a-1<0$ 在由零点存在定理知，此时 $g\left(x\right)$ 有且只有一个正零点，满足题意；

②当 $1<a<e$ 时，令 $g'\left(x\right)=0$ 得：$x_0=\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)>\log_a 1=0$，

不难得到 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上递增，且 $x\to+\infty, g\left(x\right)\to+\infty$，

所以 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(x_0\right)=a^{x_0}-x_0=\frac{1}{\ln a}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}-\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}\le 0$

由于 $\ln a>0$，所以 $1\le\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)$，进而 $e\le\frac{1}{\ln a}$，得：$1<a\le e^{\frac{1}{e}}$

③当 $a\ge e$ 时，$g\left(x\right)=a^x-x\ge e^x-x>1\left(x>0\right)$，无零点.

综上：a 的取值范围是 $(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$.

注：$e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$

2

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) $\because f(x)=ax^3+bx \quad \therefore f'(x)=3ax^2+b$ ……………………………………1 分

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 2，$\therefore \begin{cases} f'(1)=3a+b=0 \\ f(1)=a+b=2 \end{cases}$，……………………………3 分

解得 $a=-1$，$b=3$ ………………………………………………………………4 分

(2) 由 (1) 可得 $f(x)=-x^3+3x$，$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)>0$，解得 $-1<x<1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$

故 $f(x)$ 在 $[-2,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，……………………………………6 分

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=1-3=-2$，也为最小值，……………………………7 分

$\because f(-2)=2>f(\frac{1}{2})=\frac{11}{8}$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最大值是 2.…………………………………………………………………8 分

又函数 $g(x)=m-f(x)$ 有零点，

$\therefore m=f(x)$ 在 $x\in(-2,\frac{1}{2}]$ 有解.………………………………………………………9 分

$\therefore f(x)_{\min}\le m\le f(x)_{\max}$，即 $-2\le m\le 2$

故实数 m 的取值范围为 $[-2,2]$.…………………………………………………………10 分

18. 解：（1）可以用方差来度量每一组评委打分的相似性，方差越小，相似程度越高。

小组 A 的平均数 $\overline{x_A}=\frac{1}{10}(85+91+87+93+88+84+97+94+95+86)=90$ ……1 分

小组 A 的方差 $S_A^2=\frac{1}{10}\Big[(85-90)^2+(91-90)^2+(87-90)^2+(93-90)^2+(88-90)^2$

$+(84-90)^2+(97-90)^2+(94-90)^2+(95-90)^2+(86-90)^2\Big]=19$ ……2 分

小组 B 的平均数 $\overline{x_B}=\frac{1}{10}(84+87+92+96+89+95+92+91+94+90)=91$ ……3 分

小组 B 的方差 $S_B^2=\frac{1}{10}\Big[(84-91)^2+(87-91)^2+(92-91)^2+(96-91)^2+(89-91)^2$

$+(95-91)^2+(92-91)^2+(91-91)^2+(94-91)^2+(90-91)^2\Big]=12.2$ ……4 分

小组 C 的平均数 $\overline{x_C}=\frac{1}{10}(95+89+95+96+97+93+92+90+89+94)=93$ ……5 分

小组 C 的方差 $S_C^2=\frac{1}{10}\Big[(95-93)^2+(89-93)^2+(95-93)^2+(96-93)^2+(97-93)^2$

$$+(93-93)^2+(92-93)^2+(90-93)^2+(89-93)^2+(94-93)^2\Big]=7.6$$ ……6 分

注：列式正确，结果错误，给 0.5 分，列式不完整，用省略号，扣 0.5 分，总分按四舍五入取整数。

（2）由于专业评委给分更符合专业规则，相似程度应该高，即方差小，因而 C 组评委更像是专业人士组成的。……8 分

（3）小华的得分 $\overline{x}=\frac{10}{30}\overline{x_1}+\frac{10}{30}\overline{x_2}+\frac{10}{30}\overline{x_3}=\frac{10}{30}\times95+\frac{10}{30}\times93+\frac{10}{30}\times91=93$ 分……9 分

方差 $S^2=\frac{1}{30}\left\{10\times\left[S_1^2+(\overline{x_1}-\overline{x})^2\right]+10\times\left[S_2^2+(\overline{x_2}-\overline{x})^2\right]+10\times\left[S_3^2+(\overline{x_3}-\overline{x})^2\right]\right\}$……10 分

$S^2=\frac{1}{30}\left\{10\times\left[8+(95-93)^2\right]+10\times\left[12+(93-93)^2\right]+10\times\left[20+(91-93)^2\right]\right\}$……11 分

$S^2=160$……12 分

19. 解：（1）$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{4a_n}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4a_n}$ ………………1 分

$\frac{1}{a_{n-1}}-1=\frac{3a_n+1}{4a_n}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4a_n}-1$ ………………2 分

$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$………………3 分

$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1}{4}$………………4 分

所以，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列，首项 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{4}$，公比 $q=\frac{1}{4}$………………5 分

（2）$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ………………6 分

所以 $\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$………………7 分

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{4}\right)^1+1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+1+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$………………8 分

4

$=n+\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=n+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$ ………………9 分

方法一

因为 $n\in N_+$，

所以 $0<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<1$，$0<\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]<\dfrac{1}{3}$，………………10 分

所以 $n<n+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]<n+\dfrac{1}{3}$， ………………11 分

故满足条件的最大整数 $n=99$。 ………………12 分

方法二

令 $b_n=n+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$

$b_{n+1}-b_n=n+1+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right]-n-\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$， ………………10 分

因为 $n\in N_+$，

所以 $1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}>0$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列，………………11 分

又因为 $b_{99}=99+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{99}\right]<100$，$b_{101}=100+\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{100}\right]>100$，

故满足条件的最大整数 $n=99$。 ………………12 分

20．解：(1) 因为 ΔABC 中，面积为 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，

又 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ……………………………………………1 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}2ac\cos B=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，……………………………………3 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$； ……………………………………………4 分

(2) 若 ΔABC 为锐角三角形，由（1）知 $B=\dfrac{\pi}{3}$，且外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，

5

由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\times\sqrt{3}$，可得 $b=3$，……………………………………5 分

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，所以 $a+c=2\sqrt{3}(\sin A+\sin C)$；

因为 $A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $a+c=2\sqrt{3}[\sin A+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)]=2\sqrt{3}\times(\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)=6\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$，…7 分

又 ΔABC 为锐角三角形，所以 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，且 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，又 $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，则 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，

…………………………………………………………………………8 分

所以 $\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，进而 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin(A+\dfrac{\pi}{6})\leq 1$；……………………………10 分

所以 $3\sqrt{3}<a+c\leq 6$，……………………………………………………11 分

所以 ΔABC 周长 $a+b+c$ 的取值范围是 $(3\sqrt{3}+3，9]$．…………………………12 分

21. 解：(1)(*i*)依题意，如果乙肝病毒携带者的 2 人在同一组，则该组需要检测 11 次，其他 99 个组都只需要检验 1 次，所以检测总次数为 110。………………1 分

(*ii*)由(*i*)知，当乙肝病毒携带者的 2 人分在同一组时，检测的总次数是 110，当乙肝病毒携带者的 2 人分在不同组时，可以求得检测的总次数是 120，所以随机变量 X 的可能取值为 110，120。………………2 分

$$P(X=110)=C_{100}^{1}\frac{C_{2}^{2}C_{998}^{8}}{C_{1000}^{10}}=\frac{1}{111}$$ ………………3 分

$$P(X=120)=1-\frac{1}{111}=\frac{110}{111}$$ ………………4 分

则 X 的分布列：

X	110	120
P	$\dfrac{1}{111}$	$\dfrac{110}{111}$

………………5 分

所以 $EX=110\times\dfrac{1}{111}+120\times\dfrac{110}{111}=\dfrac{13310}{111}$。………………6 分

注：列式正确，结果正确给分，否则不给分。

（2）若混合血样呈阴性，则 $Y=\dfrac{1}{k}$，若混合血样呈样性，则 $Y=\dfrac{1}{k}+1$。…………7 分

$P\left(Y=\frac{1}{k}\right)=0.98^k$，$P\left(Y=\frac{1}{k}+1\right)=1-0.98^k$…………8 分

所以，$EY=\frac{1}{k}0.98^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)\times\left(1-0.98^k\right)=1+\frac{1}{k}-0.98^k$。…………9 分

令 $f(x)=1+\frac{1}{x}-0.98^x$，$f(10)=1+\frac{1}{10}-0.98^{10}=0.28$，$f(11)=1+\frac{1}{11}-0.98^{11}=0.29$，

$f(12)=1+\frac{1}{12}-0.98^{12}=0.30$…………11 分

所以，按 10 人一组，能够使得检测次数最少。…………12 分

22．解：(1) $G(x)=e^xg(x)+e^xg'(x)=e^x[g(x)+g'(x)]$

$\because g(x)<-g'(x)\therefore g(x)+g'(x)<0$，又 $e^x>0$ ……………………………………1 分

$\therefore G'(x)<0\therefore G(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数．……………………………………2 分

(2) $\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减 $\therefore \forall x>0, f'(x)\le 0$ ……………………………………3 分

又由 $f'(x)=\frac{a+\frac{1}{a}}{x}-\frac{1}{x^2}-1$，$\therefore \forall x>0$，$\frac{a+\frac{1}{a}}{x}-\frac{1}{x^2}-1\le 0$，

即 $a+\frac{1}{a}\le (x+\frac{1}{x})_{\min}$，$x\in(0,+\infty)$ ……………………………………………4 分

又 $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$（$x=1$ 时，取“=”）

$\therefore a+\frac{1}{a}\le 2, \therefore \frac{(a-1)^2}{a}\le 0$　又 $a>0, \therefore (a-1)^2\le 0, \therefore a=1$

即 a 的取值范围是 $\{1\}$．……………………………………………………6 分

注 1：若将 $f'(x)\le 0$ 恒成立转化为 $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\ge 0$ 恒成立，对 a 进行分类讨论，$a=1$ 的情形得 1 分，其他情形 1 分，结论 1 分

(3) $\because \forall x>0, g(x)>0$，及 $0<x_1<x_2$　$\therefore x_1^2g\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$，$x_2^2g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ 均大于 0.

记 $I=\dfrac{x_1^2 g\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{x_2^2 g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}$，令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则 $I=\dfrac{t^2 g(t)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)}$，…………………………7 分

注 2：学生有换元的意识，此步可以得分

由 $0<t<1<\dfrac{1}{t}$ 及(1)中 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，得 $G(t)>G(\dfrac{1}{t})$，即 $e^t g(t)>e^{\frac{1}{t}} g\left(\dfrac{1}{t}\right)$，

……………………………………………………………………………8 分

$\therefore \dfrac{g(t)}{g(\frac{1}{t})}>\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{e^t}=e^{\frac{1}{t}-t}$ ………………………………………………………………9 分

$\therefore I>t^2 e^{\frac{1}{t}-t}=e^{2\ln t+\frac{1}{t}-t}$，$t\in(0,1)$ ……………………………………………10 分

由(2)知：$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递减，

$\therefore 0<t<1$ 时，$f(t)>f(1)=2\ln 1-1+1=0$，即 $2\ln t-\dfrac{1}{t}+t>0$

$\therefore e^{2\ln t+\frac{1}{t}-t}>e^0=1$，从而有 $I>1$，即 $x_1^2 g(\dfrac{x_1}{x_2})>x_2^2 g(\dfrac{x_2}{x_1})$ ……………………12 分

注 3：若令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，利用 $t>1$ 时，$2\ln t+\dfrac{1}{t}-t<0$，同样得分；

注 4：作差法是等价的，过程合理，同样得分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。