天津市耀华中学2024届高三年级暑期学情反馈

数学学科试卷

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟.祝同学们考试顺利！

第I卷（选择题 共45分）

一、选择题：本大题共5小题，每小题5分，共45分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的，请把正确答案填涂在答题卡上.

1. 设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\}$，$B=\{x|x^2-4x+3=0\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　）

A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合B，根据集合并集与补集运算求解.

【详解】方程$x^2-4x+3=0$的两根分别为$1,3$，

故$B=\{x|x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$，

所以$A\cup B=\{-1,1,2,3\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{-2,0\}$.

故选：D

2. 设$x\in R$，则"$x^2-5x<0$"是"$|x-1|<1$"的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

分别求出两不等式的解集，根据两解集的包含关系确定.

【详解】化简不等式，可知$0<x<5$推不出$|x-1|<1$；

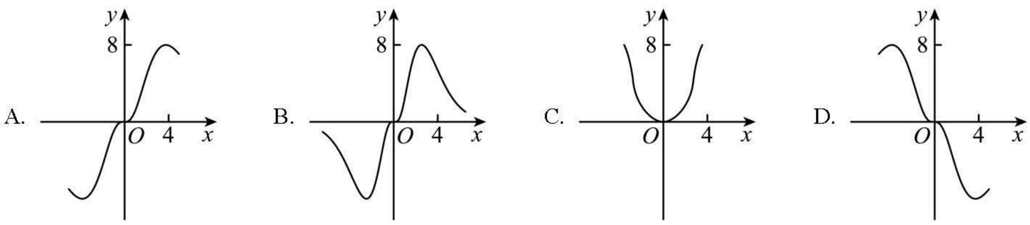
由$|x-1|<1$能推出$0<x<5$，

故“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件，

故选 B.

【点睛】本题考查充分必要条件，解题关键是化简不等式，由集合的关系来判断条件.

3. 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为（　　）



【答案】A

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性以及特殊点的函数值确定正确答案.

【详解】设 $f(x)=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$，$f(x)$ 的定义域为 R，

$f(-x)=-\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，

图像关于原点对称，C 选项错误.

$f(4)=\dfrac{2\times 4^3}{2^4+2^{-4}}=\dfrac{128}{16+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{2048}{257}\approx 7.97$，所以 BD 选项错误，A 选项正确.

故选：A

4. 某部门随机调查了 90 名工作人员，为了了解他们的休闲方式是读书还是健身与性别是否有关，得到的数据如列联表所示.若认为性别与休闲方式有关，则此时犯错误的概率不超过（　　）

性别	休闲方式		合计
	读书	健身	
女生	25（a）	20（b）	45
男生	15（c）	30（d）	45
合计	40	50	90

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

A. 0.01　　B. 0.05　　C. 95%　　D. 99.5%

【答案】B

【解析】

【分析】计算K^2的值，由此确定正确答案.

【详解】依题意，$K^2=\dfrac{90\times(25\times30-20\times15)^2}{40\times50\times45\times45}=4.5>3.841$，

所以犯错误的概率不超过0.05的情况下，认为性别与休闲方式有关.

故选：B

5. 已知$2^a=5,\log_8 3=b$，则$4^{a-3b}=$（　）

A. 25　　B. 5　　C. $\dfrac{25}{9}$　　D. $\dfrac{5}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数式与对数式的互化，幂的运算性质以及对数的运算性质即可解出.

【详解】因为$2^a=5$，$b=\log_8 3=\dfrac{1}{3}\log_2 3$，即$2^{3b}=3$，所以$4^{a-3b}=\dfrac{4^a}{4^{3b}}=\dfrac{(2^a)^2}{(2^{3b})^2}=\dfrac{5^2}{3^2}=\dfrac{25}{9}$.

故选：C.

6. 已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】

【详解】分析：由题意结合对数函数的性质整理计算即可求得最终结果.

详解：由题意结合对数函数的性质可知：

$a=\log_2 e>1$，$b=\ln 2=\dfrac{1}{\log_2 e}\in(0,1)$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e$，

据此可得：$c>a>b$.

本题选择 D 选项.

点睛：对于指数幂的大小的比较，我们通常都是运用指数函数的单调性，但很多时候，因幂的底数或指数不相同，不能直接利用函数的单调性进行比较．这就必须掌握一些特殊方法．在进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断．对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确．

7. 甲罐中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙罐中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球.先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1、A_2 和 A_3 表示从甲罐中取出红球、白球和黑球，再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示从乙罐中取出的球是红球，则下列结论中正确的是（　）

A. $P(B)=\dfrac{9}{22}$　　B. $P(B|A_1)=\dfrac{4}{11}$　　C. $P(B|A_2)=\dfrac{5}{11}$　　D. $P(B|A_3)=\dfrac{5}{11}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据全概率公式求得 $P(B)$，结合条件概型的知识确定正确答案.

【详解】依题意，$P(B)=\dfrac{5}{5+2+3}\times\dfrac{5}{4+3+3+1}+\dfrac{5}{5+2+3}\times\dfrac{4}{4+3+3+1}=\dfrac{9}{22}$，A 选项正确.

$P(B|A_1)=\dfrac{5}{4+3+3+1}=\dfrac{5}{11}$，B 选项错误，

$P(B|A_2)=\dfrac{4}{4+3+3+1}=\dfrac{4}{11}$，C 选项错误，

$P(B|A_3)=\dfrac{4}{4+3+3+1}=\dfrac{4}{11}$，D 选项错误.

故选：A

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，

$f(x)=ax^2+b$．若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\dfrac{9}{2}\right)=$（　）

A. $-\dfrac{9}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{7}{4}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】通过$f(x+1)$是奇函数和$f(x+2)$是偶函数条件，可以确定出函数解析式$f(x)=-2x^2+2$，进而利用定义或周期性结论，即可得到答案.

【详解】[方法一]：

因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(-x+1)=-f(x+1)$①；

因为$f(x+2)$是偶函数，所以$f(x+2)=f(-x+2)$②.

令$x=1$，由①得：$f(0)=-f(2)=-(4a+b)$，由②得：$f(3)=f(1)=a+b$，

因为$f(0)+f(3)=6$，所以$-(4a+b)+a+b=6\Rightarrow a=-2$，

令$x=0$，由①得：$f(1)=-f(1)\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow b=2$，所以$f(x)=-2x^2+2$.

思路一：从定义入手.

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}+2\right)=f\left(-\frac{5}{2}+2\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}+1\right)=-f\left(\frac{3}{2}+1\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$-f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$$

所以$f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

[方法二]：

因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(-x+1)=-f(x+1)$①；

因为$f(x+2)$是偶函数，所以$f(x+2)=f(-x+2)$②.

令$x=1$，由①得：$f(0)=-f(2)=-(4a+b)$，由②得：$f(3)=f(1)=a+b$，

因为$f(0)+f(3)=6$，所以$-(4a+b)+a+b=6\Rightarrow a=-2$，

令$x=0$，由①得：$f(1)=-f(1)\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow b=2$，所以$f(x)=-2x^2+2$.

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数$f(x)$的周期$T=4$.

所以$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

故选：D.

【点睛】在解决函数性质类问题的时候，我们通常可以借助一些二级结论，求出其周期性进而达到简便计算的效果.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-x},x\le 1\\ \ln\dfrac{x}{a},x>1\end{cases}(a>0)$ 图象上存在关于 y 轴对称的两点，则正数 a 的取值范围是（　）

A. $(\mathrm{e},+\infty)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】先分析 $f(x)$ 的单调性，可得对称点分别位于 $y=a\mathrm{e}^{-x}(x\le 1)$ 与 $y=\ln\dfrac{x}{a}(x>1)$ 的图象上，从而得到 $a\mathrm{e}^{x_0}=\ln\dfrac{x_0}{a}(x_0>1)$，进而利用同构法，构造函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+x$ 得到 $\ln a=\ln x_0-x_0$，再构造函数 $h(x)=\ln x-x,x\in(1,+\infty)$，由此得解.

【详解】因为 $f(x)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-x},x\le 1\\ \ln\dfrac{x}{a},x>1\end{cases}(a>0)$，

所以当 $x\le 1$ 时，$f(x)=a\mathrm{e}^{-x}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln\dfrac{x}{a}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

又 $f(x)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的两点，

所以这两个对称点分别位于 $y=a\mathrm{e}^{-x}(x\le 1)$ 与 $y=\ln\dfrac{x}{a}(x>1)$ 的图象上；

设 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=\ln\dfrac{x}{a}(x>1)$ 的图象上，则 $P'(-x_0,y_0)$ 在函数 $y=a\mathrm{e}^{-x}$ 的图象上，且 $x_0>1$，

故有 $a\mathrm{e}^{x_0}=\ln\dfrac{x_0}{a}(x_0>1)$，即 $\mathrm{e}^{x_0+\ln a}+\ln a=\ln x_0$，

进而 $\mathrm{e}^{x_0+\ln a}+\ln a+x_0=x_0+\ln x_0=\mathrm{e}^{\ln x_0}+\ln x_0$；

设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+x$，则 $\varphi(\ln a+x_0)=\varphi(\ln x_0)$，

又 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$ 恒成立，故 $\varphi(x)$ 在 R 上单调递增，

所以 $\ln a+x_0=\ln x_0$，即 $\ln a=\ln x_0-x_0$，

令 $h(x)=\ln x-x,x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $h(x)<h(1)=-1$，则 $\ln a<-1$，于是 $0<a<\frac{1}{e}$.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键在于利用同构法，将 $ae^{x_0}=\ln\frac{x_0}{a}\left(x_0>1\right)$ 转化为

$e^{x_0+\ln a}+\ln a+x_0=e^{\ln x_0}+\ln x_0$，从而构造了函数 $\varphi(x)=e^x+x$，由此得解.

第II卷（非选择题 共105分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共计30分.不需写出解答过程，请把答案填在答案纸上的指定位置.

10. 已知 $\left(1-i\right)^2 z=3+2i$（i为虚数单位），则 $z=$________.

【答案】$-1+\frac{3}{2}i$

【解析】

【分析】利用复数乘法、除法运算求得正确答案.

【详解】依题意 $\left(1-i\right)^2 z=3+2i$，

则 $z=\frac{3+2i}{\left(1-i\right)^2}=\frac{3+2i}{-2i}=\frac{\left(3+2i\right)\cdot 2i}{-2i\cdot 2i}=\frac{-4+6i}{4}=-1+\frac{3}{2}i$.

故答案为：$-1+\frac{3}{2}i$

11. $(\frac{2}{x}-\sqrt{x})^6$ 的展开式中常数项为______ .

【答案】60

【解析】

【分析】先求出展开式的通项公式,再令 x 的指数为0,解出 r,进而可求出常数项.

【详解】$(\frac{2}{x}-\sqrt{x})^6$ 的展开式中的通项公式：$T_{r+1}=C_6^r(\frac{2}{x})^{6-r}(-\sqrt{x})^r=(-1)^r 2^{6-r}C_6^r x^{\frac{3r}{2}-6}$.

令 $\frac{3r}{2}-6=0$，解得 $r=4$.

$\therefore (\frac{2}{x}-\sqrt{x})^6$ 的展开式中常数项为：$(-1)^4\times 2^2 C_6^4=60$.

故答案为60.

【点睛】本题考查了二项式定理,属基础题.

12. 将字母a、b、c、d、e、f排成一排，其中a必须在b的左边，则不同的安排方法有________.（用数字作答）

【答案】360

【解析】

【分析】先安排a,b，然后排其它字母，由此计算出不同的安排方法.

【详解】先安排a,b，方法数有C_6^2种方法，

再安排其它字母，方法数有A_4^4种，

故不同的安排方法有$C_6^2A_4^4=360$种.

故答案为：360

13. 现有7张卡片，分别写上数字1，2，2，3，4，5，6．从这7张卡片中随机抽取3张，记所抽取卡片上数字的最小值为ξ，则$P(\xi=2)=$_________，$E(\xi)=$________.

【答案】 ①. $\dfrac{16}{35}$， ②. $\dfrac{12}{7}$##$1\dfrac{5}{7}$

【解析】

【分析】利用古典概型概率公式求$P(\xi=2)$，由条件求ξ分布列，再由期望公式求其期望.

【详解】从写有数字1,2,2,3,4,5,6的7张卡片中任取3张共有C_7^3种取法，其中所抽取的卡片上的数字的最小值为2的取法有$C_4^1+C_2^1C_4^2$种，所以$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^1+C_2^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{16}{35}$，

由已知可得ξ的取值有1，2，3，4，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^2}{C_7^3}=\dfrac{15}{35}$，$P(\xi=2)=\dfrac{16}{35}$，

，$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{3}{35}$，$P\left(\xi=4\right)=\dfrac{1}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

所以$E(\xi)=1\times\dfrac{15}{35}+2\times\dfrac{16}{35}+3\times\dfrac{3}{35}+4\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{12}{7}$，

故答案为：$\dfrac{16}{35}$，$\dfrac{12}{7}$.

14. 已知$5x^2y^2+y^4=1(x,y\in R)$，则x^2+y^2的最小值是_______.

【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】根据题设条件可得$x^2=\frac{1-y^4}{5y^2}$，可得$x^2+y^2=\frac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\frac{1}{5y^2}+\frac{4y^2}{5}$，利用基本不等式即可求解.

【详解】$\because 5x^2y^2+y^4=1$

$\therefore y\neq 0$且$x^2=\frac{1-y^4}{5y^2}$

$\therefore x^2+y^2=\frac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\frac{1}{5y^2}+\frac{4y^2}{5}\geq 2\sqrt{\frac{1}{5y^2}\cdot\frac{4y^2}{5}}=\frac{4}{5}$，当且仅当$\frac{1}{5y^2}=\frac{4y^2}{5}$，即$x^2=\frac{3}{10},y^2=\frac{1}{2}$时取等号.

$\therefore x^2+y^2$的最小值为$\frac{4}{5}$.

故答案为：$\frac{4}{5}$.

【点睛】本题考查了基本不等式在求最值中的应用.利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是，首先要判断参数是否为正；二定是，其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是，最后一定要验证等号能否成立（主要注意两点，一是相等时参数否在定义域内，二是多次用$\geq$或$\leq$时等号能否同时成立）.

15. 设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-ax+1,x<a\\ \left(x-2\right)^2,x\geq a\end{cases}$存在最小值，则$a$的取值范围是________.

【答案】$0\leq a\leq 1$

【解析】

【分析】根据a的值与$0,2$的大小关系进行分类讨论，每种情况分别求函数在$x<a$和$x\geq a$的最小值，并比较大小即可.

【详解】①当$a<0$时，$-a>0$，故函数$f(x)$在$\left(-\infty,a\right)$上单调递增，因此$f(x)$不存在最小值；

②当$a=0$时，$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ (x-2)^2, & x\geq 0\end{cases}$.

当$x\geq 0$时，$f(x)_{\min}=f(2)=0<1$，故函数$f(x)$存在最小值；

③当$0<a\leq 2$时，$-a<0$，故函数$f(x)$在$\left(-\infty,a\right)$上单调递减，

当$x<a$时，$f(x)>f(a)=-a^2+1$；当$x\geq a$时，$f(x)=(x-2)^2\geq f(2)=0$.

若$-a^2+1<0$，则$f(x)$不存在最小值，故$-a^2+1\geq 0$，解得$-1\leq a\leq 1$.

此时$0<a\leq 1$满足题设；

④当$a>2$时，$-a<0$，故函数$f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递减，

当$x<a$时，$f(x)>f(a)=-a^2+1$；当$x\geq a$时，$f(x)=(x-2)^2\geq f(a)=(a-2)^2$.

因为$(a-2)^2-(-a^2+1)=2a^2-4a+3=2(a-1)^2+1>0$，所以$(a-2)^2>-a^2+1$，

因此$f(x)$不存在最小值.

综上，a的取值范围是$0\leq a\leq 1$.

故答案为：$0\leq a\leq 1$.

三、解答题：本大题共5小题，共75分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把解题过程写在答案纸上.

16. 在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$\sqrt{2}a-2b\sin A=0$.

（1）求角B的大小；

（2）设$a=5$，$c=4\sqrt{2}$，求b和$\sin(2C+B)$的值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{4}$

（2）$b=\sqrt{17}$，$\sin(2C+B)=-\frac{7\sqrt{2}}{34}$

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理得到$b\sin A=a\sin B$，即可得到$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而求出$B$；

（2）利用余弦定理求出b，再利用正弦定理求出$\sin C$，即可求出$\cos C$，再利用二倍角公式求出$\sin 2C$、$\cos 2C$，最后根据两角和的正弦公式计算可得；

【小问1详解】

解：在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，

又由$\sqrt{2}a-2b\sin A=0$，得$2a\sin B=\sqrt{2}a$，即$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得$B=\frac{\pi}{4}$.

【小问2详解】

解：由（1）得，在$\triangle ABC$中，$a=5$，$c=4\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$

由余弦定理有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=17$，故$b=\sqrt{17}$.

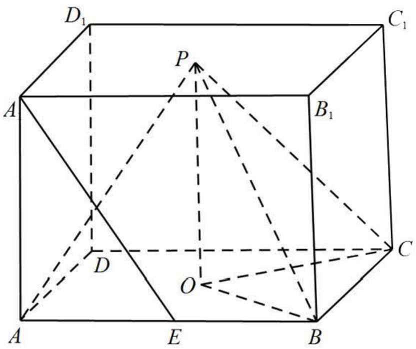
由正弦定理$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{4\sqrt{2}}{\sin C}=\frac{\sqrt{17}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，可得$\sin C=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

又因为$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

因此$\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{8}{17}$，$\cos 2C=2\cos^2 C-1=-\frac{15}{17}$.

所以$\sin(2C+B)=\sin 2C\cos B+\cos 2C\sin B=\frac{8}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{15}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{34}$.

17. 如图，P，O分别是正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$上、下底面的中心，E是AB的中点，$AA_1=2$，$AB=2\sqrt{2}$.



（1）求证：A_1E // 平面PBC；

（2）求直线PA与平面PBC所成角的正弦值；

（3）求平面POC与平面PBC夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

（3）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1)建立坐标系，利用平面的法向量与$\overrightarrow{A_1E}$的数量积为零可证明；

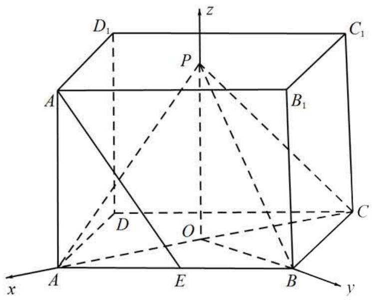
(2)利用$\overrightarrow{PA}$与平面的法向量可求解；

(3)利用平面的法向量可求解.

【小问 1 详解】

以点O为原点，直线OA，OB，OP所在直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$E(1,1,0)$，$P(0,0,2)$，$B(0,2,0)$，$C(-2,0,0)$，



由上得$\overrightarrow{A_1E}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，

设平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-2x-2y=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$

取$z=1$，得$\vec{n}=(-1,1,1)$，因为$\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}=0$，所以$\overrightarrow{A_1E}\perp\vec{n}$，

又$A_1E\not\subset$平面PBC，所以$A_1E\,//$平面PBC.

【小问 2 详解】

由（1）知平面PBC的法向量为$\vec{n}=(-1,1,1)$，

因为$\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$，所以$\cos\langle\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以直线PA与平面PBC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 3 详解】

显然，平面POC的法向量为$\vec{m}=(0,1,0)$，

由（1）知平面PBC的法向量为$\vec{n}=(-1,1,1)$，

设平面 POC 与平面 PBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

18. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P（-1，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$）在椭圆 C 上，且 $|PF_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，M 为线段 AB 的中点，若椭圆 C 上存在点 N，满足 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}$（$O$ 为坐标原点），求直线 l 的方程.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.（2）$x+\sqrt{7}y-1=0$ 或 $x-\sqrt{7}y-1=0$.

【解析】

【分析】（1）根据题意得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$①，$\sqrt{(-1-c)^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$②，$c^2=a^2-b^2$③，由①②③组成方程组，解得 a，b，进而得椭圆 C 的方程.

（2）设直线 l 的方程为 $x=ky+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线 l 与椭圆 C 的方程得关于 y 的一元二次方程，结合韦达定理得 $y_1+y_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1+x_2=\dfrac{4}{k^2+2}$，从而得线段 AB 中点 M 坐标，点 N 的坐标，将其代入椭圆方程，可解得 k，进而得出直线 l 的方程.

【详解】解：（1）因为点 $P\left(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，且 $|PF_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$，①

$\sqrt{(-1-c)^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，解得 $c=1$，②

又因为 $c^2=a^2-b^2$ ③

由①②③组成方程组，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，

所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由（1）可知 $F_2(1,0)$，

设直线l的方程为$x=ky+1$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立直线l与椭圆C的方程得$(k^2+2)y^2+2ky-1=0$，

得$y_1+y_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，则$x_1+x_2=\dfrac{4}{k^2+2}$，

所以线段AB中点$M(\dfrac{2}{k^2+2},\ -\dfrac{k}{k^2+2})$，

所以$\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}=3(\dfrac{2}{k^2+2},\ -\dfrac{k}{k^2+2})$，

所以N点的坐标为$(\dfrac{6}{k^2+2},\ -\dfrac{3k}{k^2+2})$，

将N点坐标代入椭圆的方程$\dfrac{(\frac{6}{k^2+2})^2}{2}+(\dfrac{-3k}{k^2+2})^2=1$，

解得$k^2=7$，$k=\pm\sqrt{7}$，

所以直线l的方程为：$x+\sqrt{7}y-1=0$或$x-\sqrt{7}y-1=0$．

【点睛】本题考查椭圆的标准方程，直线与椭圆的相交问题，属于中档题．

19. 已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比$q>1$，若$a_2+a_3+a_4=14$，且a_2，a_3+1，a_4分别是等差数列$\left\{b_n\right\}$第1，3，5项.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前n项和S_n；

（3）记$d_n=\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{6n+5}{4b_nb_{n+1}}$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$的最大值和最小值.

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$，$b_n=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}$

（2）$S_n=7-\dfrac{3n+7}{2^n}$

（3）最大值为$\dfrac{11}{28}$，最小值为$\dfrac{3}{20}$

【解析】

【分析】（1）根据等差数列、等比数列的知识求得a_n,b_n.

（2）利用错位相减求和法求得S_n.

（3）利用裂项求和法，结合对n进行分类讨论，由此求得$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$的最大值和最小值.

【小问 1 详解】

依题意，$\begin{cases} a_2+a_3+a_4=14 \\ 2(a_3+1)=a_2+a_4 \\ q>1 \end{cases}$，$\begin{cases} a_1q+a_1q^2+a_1q^3=14 \\ 2(a_1q^2+1)=a_1q+a_1q^3 \\ q>1 \end{cases}$，

解得 $a_1=1, q=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$，

则 $b_1=a_2=2, b_3=a_3+1=4+1=5, b_5=a_4=8$，

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则 $d=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$，

所以 $b_n=2+(n-1)\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

$c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}}{2^{n-1}}=\frac{3n+1}{2^n}$，

$S_n=\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\cdots+\frac{3n+1}{2^n}$，$\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{3n+1}{2^{n+1}}$，

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{3}{2^n}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}$，

$S_n=4+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{3n+1}{2^n}$

$=4+\frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n+1}{2^n}=7-\frac{3n+7}{2^n}$.

【小问 3 详解】

$d_n=(-1)^{n-1}\frac{6n+5}{4b_nb_{n+1}}=(-1)^{n-1}\times\frac{6n+5}{4\times\left(\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}n+\frac{4}{2}\right)}$

$=(-1)^{n-1}\times\frac{6n+5}{(3n+1)\times(3n+4)}=(-1)^{n-1}\times\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}\right)$，

$\sum_{i=1}^{n}d_i=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\times\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}\right)$，

当 n 为偶数时，$\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}$，

令 $T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}$（$n$ 为偶数），则 $\{T_n\}$ 是单调递增数列，

最小值为 $T_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$，且 $T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} < \frac{1}{4}$.

当 n 为奇数是，$\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{3n+4}$，

令 $M_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3n+4}$（$n$ 为奇数），则 $\{M_n\}$ 是单调递减数列，

最大值为 $T_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{11}{28}$，且 $M_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3n+4} > \frac{1}{4}$.

综上所述，$\sum_{i=1}^{n} d_i$ 的最大值为 $\frac{11}{28}$，最小值为 $\frac{3}{20}$.

【点睛】求解等差数列或等比数列的通项公式，关键是通过基本量的计算求得首项和公差（公比）.求解形如等差数列乘以等比数列，或等差数列除以等比数列的数列的前 n 项和，使用的方法是错位相减求和法.

20. 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x) < -1$，求 a 的取值范围；

（3）设 $n \in \mathbf{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

【答案】（1）$f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$，增区间为 $(0, +\infty)$.

（2）$a \le \frac{1}{2}$

（3）见解析

【解析】

【分析】（1）求出 $f'(x)$，讨论其符号后可得 $f(x)$ 的单调性.

（2）设 $h(x) = xe^{ax} - e^x + 1$，求出 $h''(x)$，先讨论 $a > \frac{1}{2}$ 时题设中的不等式不成立，再就 $0 < a \le \frac{1}{2}$ 结合放缩法讨论 $h'(x)$ 符号，最后就 $a \le 0$ 结合放缩法讨论 $h(x)$ 的范围后可得参数的取值范围.

（3）由（2）可得$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对任意的$t>1$恒成立，从而可得$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，结合裂项相消法可证题设中的不等式.

【小问1详解】

当$a=1$时，$f(x)=(x-1)e^x$，则$f'(x)=xe^x$，

当$x<0$时，$f'(x)<0$，当$x>0$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$.

【小问2详解】

设$h(x)=xe^{ax}-e^x+1$，则$h(0)=0$，

又$h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$，设$g(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$，

则$g'(x)=(2a+a^2x)e^{ax}-e^x$，

若$a>\frac{1}{2}$，则$g'(0)=2a-1>0$，

因为$g'(x)$为连续不间断函数，

故存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$\forall x\in(0,x_0)$，总有$g'(x)>0$，

故$g(x)$在$(0,x_0)$为增函数，故$g(x)>g(0)=0$，

故$h(x)$在$(0,x_0)$为增函数，故$h(x)>h(0)=0$，与题设矛盾.

若$0<a\le\frac{1}{2}$，则$h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x$，

下证：对任意$x>0$，总有$\ln(1+x)<x$成立，

证明：设$S(x)=\ln(1+x)-x$，故$S'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，

故$S(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，故$S(x)<S(0)=0$即$\ln(1+x)<x$成立.

由上述不等式有$e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x<e^{ax+ax}-e^x=e^{2ax}-e^x\le 0$，

故$h'(x)\le 0$总成立，即$h(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，

所以$h(x)<h(0)=0$.

当$a\le 0$时，有$h'(x)=e^{ax}-e^x+axe^{ax}<1-1+0=0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，所以$h(x)<h(0)=0$.

综上，$a\le\frac{1}{2}$.

【小问 3 详解】

取$a=\frac{1}{2}$，则$\forall x>0$，总有$xe^{\frac{1}{2}x}-e^x+1<0$成立，

令$t=e^{\frac{1}{2}x}$，则$t>1,t^2=e^x,x=2\ln t$，

故$2t\ln t<t^2-1$即$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对任意的$t>1$恒成立.

所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，有$2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，

整理得到：$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，

故$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln(n+1)$，

故不等式成立.

【点睛】思路点睛：函数参数的不等式的恒成立问题，应该利用导数讨论函数的单调性，注意结合端点处导数的符号合理分类讨论，导数背景下数列不等式的证明，应根据已有的函数不等式合理构建数列不等式.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。