2019—2020 学年下学期全国百强名校

“领军考试”高三数学（文数）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在本试题相应的位置。

2．全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

3．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用 0.5mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。

4．考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\left|2x-3<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\log_2 x<\dfrac{1}{2}\right.\right\}$，则 $A\bigcap B=$

A．$\left\{x\left|x<\dfrac{3}{2}\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|x<\sqrt{2}\right.\right\}$

C．$\left\{x\left|0<x<\dfrac{3}{2}\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|0<x<\sqrt{2}\right.\right\}$

2．已知复数 $z=\dfrac{5+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

A．$2\sqrt{2}$　　B．8　　C．$\sqrt{13}$　　D．13

3．直线 $y=x$ 绕原点逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{12}$ 后与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的一条渐近线重合,则双曲线 C 的离心率为

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．2　　D．4

4．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，若 $\dfrac{{a_3}^2a_9}{{a_5}^2}=4$，则 $a_5=$

A．2　　B．4　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{1}{4}$

5．已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geq -1\\ y\geq -1\\ x-2y+2\geq 0\\ 2x-y-2\leq 0\end{cases}$，则 $3x-y$ 的最大值是

A．4　　B．3　　C．-2　　D．$-\dfrac{7}{2}$

6．某中学举行“感恩、责任、信仰、奋斗”的十八岁成人礼仪式，其中有一项学生发言，准备从 3 名男生、2 名女生中随机选 2 人发言，则既有男生发言又有女生发言的概率为

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

7．已知变量 x,y 的关系可以用模型 $y=c\mathrm{e}^{kx}$ 拟合，设 $z=\ln y$，其变换后得到一组数据如下：

x	16	17	18	19
z	50	34	41	31

由上表可得线性回归方程 $\hat{z}=-4x+\hat{a}$，则 $c=$

A．-4　　B．e^{-4}

C．109　　D．e^{109}

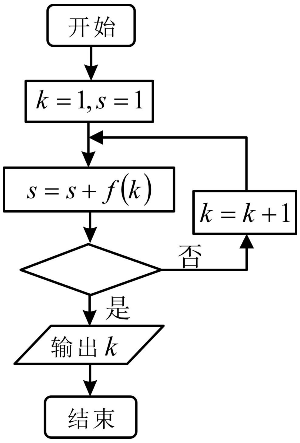
8．已知 $f(k)=k\cos k\pi\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，执行如图所示的程序框图，若输出 k 的值为 4，则判断框内可填入的条件是

A．$s\geq -2$？

B．$s\geq 2$？

C．$s\geq 3$？

D．$s\geq 4$？



9．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,过点 A 及 C_1D_1 中点作与直线 BD 平行的平面 α，则平面 α 与该正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各面交线长度之和为

A．$5\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{13}+\sqrt{2}$

C．$2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$　　D．$5\sqrt{2}$

10．已知定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数 $f(x)$ 满足对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x_1+x_2)=\dfrac{1}{2}f(x_1)f(x_2)$，且 $f(0)\neq 0$，$f(1)=6$，若 $2<f(a+1)<18$，则 a 的取值范围是

A．$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(0,2)$　　D．$(1,3)$

11．蒙日圆涉及的是几何学中的一个著名定理,该定理的内容为：椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上,该圆称为原椭圆的蒙日圆,若椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a+2}+\dfrac{y^2}{a}=1(a>0)$ 的蒙日圆为 $x^2+y^2=4$，$a=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

12．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2019}=$

A．2020　　B．2019　　C．1010　　D．0

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．斜率为 -1 的直线 l 与 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2$ 的图象相切，则直线 l 的方程为__________.

14．已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2),\boldsymbol{b}=(1,1)$，若 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$，则 $k=$__________.

15．函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$，若存在 $x_0\in[-2\pi,2\pi]$，使得 $f(x_0)=-2$，则 ω 的取值范围是__________.

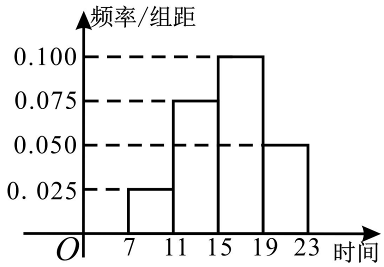
16．在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=1, AD=\sqrt{2}$，把该四边形沿 AC 折起，使得点 B 到达点 E，且平面 $AEC\perp$ 平面 ACD，若点 A、C、D、E 都在同一个球的表面上，则该球的表面积为__________.

三、解答题：共 70 分．解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．(12 分)

2019年国庆节假期期间,某商场为掌握假期期间顾客购买商品人次,统计了 10 月 1 日 $7:00\sim23:00$ 这一时间段内顾客购买商品人次,统计发现这一时间段内顾客购买商品共 5000 人次,顾客购买商品时刻的的频率分布直方图如下图所示,其中时间段 $7:00\sim11:00$, $11:00\sim15:00$, $15:00\sim19:00$, $19:00\sim23:00$,依次记 $[7,11)$, $[11,15)$, $[15,19)$, $[19,23]$.



（1）求该天顾客购买商品时刻的中位数 t 与平均值 $\overline{x}$ (同一组中的数据用该组区间的中点值代表)；

（2）现从 10 月 1 日在该商场购买商品的顾客中随机抽取 100 名顾客，经统计有男顾客 40 人，其中 10 人购物时刻在 $[19,23]$（夜晚），女顾客 60 人，其中 50 人购物时刻在 $[7,19)$（白天），根据提供的统计数据，完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 90%的把握认为“男顾客更喜欢在夜晚购物”？

	白天	夜晚	总计
男顾客			
女顾客			
总计			100

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ge k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18．(12 分)

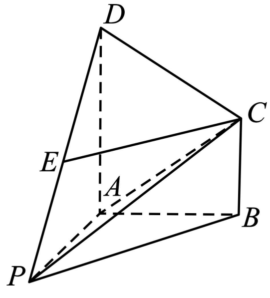
已知△ABC 中 $3AC\tan C+AB(\tan\angle BAC+\tan C)=0$.

（1）求 $\cos\angle BAC$；

（2）若 $AC=3, AB=1$,点 D 在 BC 边上,且 $\angle BAD=\angle CAD$,求 AD 的长.

19．(12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中 $AD/\!/BC, DA\perp AB$, $AD=2, AB=BC=1, CD=\sqrt{2}$,点 E 为 PD 中点.



（1）求证：$CE/\!/$平面 PAB；

（2）若 $PA\perp AD$，$PA=2, \angle PAB=\dfrac{2\pi}{3}$，求三棱锥 $A-PCD$ 的体积.

20．(12 分)

已知过点 $P(4,0)$ 的动直线与抛物线 $C: y^2 = 2px\,(p>0)$ 交于点 A,B ,且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$（点 O 为坐标原点）.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）当直线 AB 变动时, x 轴上是否存在点 Q,使得点 P 到直线 AQ,BQ 的距离相等,若存在,求出点 Q 坐标,若不存在,说明理由.

21．(12 分)

已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x+1\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $2<a<\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$，且 $g(x)=f(x)+a(\ln x-x)+\ln x$ 有 2 个不同的极值点 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$,求证：① $\frac{1}{\mathrm{e}}<x_1<1$；② $g(x_1)-g(x_2)<\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}-2$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=a-\frac{1}{2}t \end{cases}$,(t 为参数, $a\in\mathbf{R}$).在以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=3$.

（1）若点 $A(0,4)$ 在直线 l 上,求直线 l 的极坐标方程；

（2）已知 $a>0$, 若点 P 在直线 l 上,点 Q 在曲线 C 上,若 $|PQ|$ 最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,求 a 的值.

23．[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x)=x^2+2|x-1|$.

（1）求不等式 $f(x)>\frac{|2x|}{x}$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 M,且 $a+b+c=M\ (a,b,c\in\mathbf{R})$,求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}$.

2019—2020学年下学期全国百强名校

"领军考试"高三文数参考答案

1.【答案】D

【解析】因为 $A=\{x|2x-3<0\}=\left\{x\middle|x<\dfrac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{x\middle|\log_2 x<\dfrac{1}{2}\right\}=\{x|0<x<\sqrt{2}\}$，且 $\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<\sqrt{2}\}$，故选D.

2.【答案】B

【解析】由 $z=\dfrac{5+i}{1-i}-i=\dfrac{(5+i)(1+i)}{2}-i=2+3i-i=2+2i$，所以 $z\cdot\overline{z}=2^2+2^2=8$，故选B.

3.【答案】C

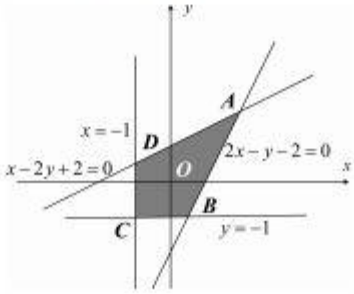
【解析】直线 $y=x$ 绕原点逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{12}$ 后得直线 $y=\sqrt{3}x$，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=2$，故选C.

4.【答案】B

【解析】由题意可得 $\dfrac{a_3^{\,2}a_9}{a_5^{\,2}}=\dfrac{a_1a_5a_9}{a_5^{\,2}}=\dfrac{a_5^{\,3}}{a_5^{\,2}}=a_5=4$，故选B.

5.【答案】A

【解析】作出不等式组 $\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge -1\\ x-2y+2\ge 0\\ 2x-y-2\le 0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图所示，设 $z=3x-y$，则 $y=3x-z$，当直线 $y=3x-z$ 经过点 $A(2,2)$ 时，z 取到最大值，$z_{\max}=3\times 2-2=4$，故选A.



6.【答案】C

【解析】记3名男生分别为 a,b,c，2名女生分别为 x,y，从这5名学生中选2名学生结果有：

$ab,ac,ax,ay,bc,bx,by,cx,cy,xy$，共10种，既有男生又有女生的结果有：$ax,ay,bx,by,cx,cy$，共6种，

所以所求概率 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，故选C.

7.【答案】D

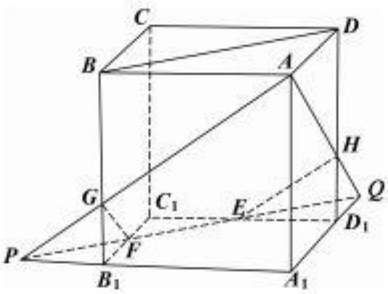
【解析】由题意知 $\overline{x}=17.5$，$\overline{z}=39$，代入 $\hat{z}=-4x+\hat{a}$ 得 $\hat{a}=109$，所以 $z=\ln y=\ln ce^{kx}=kx+\ln c$，所以 $\ln c=109, c=e^{109}$，故选D.

8.【答案】C

【解析】第一次执行循环：$k=1$，$s=1+f(1)=1-1=0$；第二次执行循环：$k=2$，$s=0+2f(2)=0+2=2$；第三次执行循环：$k=3$，$s=2+3f(3)=2-3=-1$；第四次执行循环：$k=4$，$s=-1+4f(4)=-1+4=3$，满足条件，结束循环，所以判断框内填入的条件可以是 $s\geq 3$?，故选C.

9.【答案】B

【解析】分别取 D_1C_1 中点 E，B_1C_1 中点 F，BB_1 三等分点 G，DD_1 三等分点 H，则五边形 $AHEFG$ 就是平面 α 与各面的交线所组成的，其中 $AH=AG=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，$HE=GF=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，$EF=\sqrt{2}$，所以平面 α 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各面交线长度之和为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$，故选B.



10.【答案】B

【解析】$f(x_1+x_2)=\dfrac{1}{2}f(x_1)f(x_2)$ 中令 $x_1=x_2=1$，得 $f(2)=\dfrac{1}{2}f(1)f(1)=18$，令 $x_1=x_2=0$，得 $f(0)=2$，所以 $2<f(a+1)<18$，即 $f(0)<f(a+1)<f(2)$，因为 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以 $0<a+1<2, -1<a<1$，故选B.

11.【答案】A

【解析】取特殊位置，椭圆C在长轴右端点与短轴上端点处的切线互相垂直，两切线方程分别为直线 $x=\sqrt{a+2}, y=\sqrt{a}$，交点为 $(\sqrt{a+2},\sqrt{a})$，所以 $(\sqrt{a+2})^2+(\sqrt{a})^2=4$，所以 $a=1$，

故选A.

12.【答案】D

【解析】由$a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$可得$a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}=-(4k-3)-(4k-2)+(4k-1)+4k=4$，所以$S_{2019}=S_{2020}-a_{2020}=505\times4-2020=0$，故选D.

13.【答案】$3x+3y+1=0$

【解析】由$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$可得$f'(x)=x^2+2x$，由$x^2+2x=-1$得$x=-1$，所以切点为$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$，所以直线$l$的方程为$y-\frac{2}{3}=-(x+1)$，即$3x+3y+1=0$.

14.【答案】5

【解析】由$\boldsymbol{a}=(-1,2),\boldsymbol{b}=(1,1)$，得$\boldsymbol{a}^2=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1\times1+2\times1=1$，所以

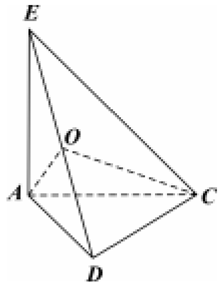
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5-k=0$，所以$k=5$.

15.【答案】$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

【解析】由$x\in[-2\pi,2\pi]$得$\omega x\in[-2\omega\pi,2\omega\pi]$，所以当$-2\omega\pi\le-\frac{\pi}{2}$或$2\omega\pi\ge\frac{3\pi}{2}$，即$\omega\ge\frac{1}{4}$或$\omega\ge\frac{3}{4}$，所以$\omega$的取值范围是$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

16.【答案】3π

【解析】由题意可得$EA=AC=CD=1,EC=AD=\sqrt{2}$,所以$EA\perp AC,EC\perp CD$,结合平面$AEC\perp$平面$ACD$，可得$EA\perp AD,EC\perp CD$,取ED中点$O$，则$OA=OC=OD=OE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$O$是球心，球的半径$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以该球的表面积$S=4\pi R^2=3\pi$.



17. 解：(1) 由$(11-7)\times 0.025+(15-11)\times 0.075=0.4$，

$(11-7)\times 0.025+(15-11)\times 0.075+(19-15)\times 0.100=0.8$，

可得$15<t<19$,所以$(11-7)\times 0.025+(15-11)\times 0.075+(t-15)\times 0.100=0.5$，

解得$t=16$，所以该天顾客购买商品时刻的中位数为$16:00$.…………3 分

该天顾客购买商品时刻的平均值$\overline{x}=(9\times 0.025+13\times 0.075+17\times 0.100+21\times 0.050)\times 4=15.8$,即

$15:48$. …………6 分

(2) 根据题设中的数据得到如下 2×2 列联表：

	白天	夜晚	总计
男顾客	30	10	40
女顾客	50	10	60
总计	80	20	100

…………8 分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算，得$K^2=\dfrac{100(50\times 10-30\times 10)^2}{80\times 20\times 60\times 40}\approx 1.042<2.706$.

所以没有 90%的把握认为"男顾客更喜欢在夜晚购物"．…………12 分

18. 解：（1）由$3AC\tan C+AB(\tan\angle BAC+\tan C)=0$及正弦定理得

$(3\sin B+\sin C)\dfrac{\sin C}{\cos C}+\dfrac{\sin C\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC}=0$,由$0<C<\pi.\sin C\neq 0$得

$(3\sin B+\sin C)\cos\angle BAC+\sin\angle BAC\cos C=0$，

整理得$3\sin B\cos\angle BAC+\sin C\cos\angle BAC+\sin\angle BAC\cos C=0$，

即$3\sin B\cos\angle BAC+\sin(\angle BAC+C)=0$,即$3\sin B\cos\angle BAC+\sin B=0$,…………3 分

因为$0<B<\pi.\sin B\neq 0$，

所以$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{3}$. …………6 分

（2）由$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{3}$，可得$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由$\angle BAD=\angle CAD$可得$\sin\angle BAD=\sin\angle CAD=\sqrt{\dfrac{1-\cos\angle BAC}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$可得

$\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD+\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，

整理得$2\sqrt{2}=\sqrt{6}AD+\frac{\sqrt{6}}{3}AD$，所以$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.…………6 分

19. (1)证明：作$CF\perp DA$,垂足为F,则$CF\parallel AB,CF=AB=1$,

因为$CD=\sqrt{2}$,所以$DF=\sqrt{CD^2-CF^2}=\sqrt{2-1}=1$,所以点$F$为$AD$中点,

由$CF\parallel AB,CF\not\subset$平面$PAB$, $AB\subset$平面PAB,可得$CF\parallel$平面PAB,…………3 分

连接EF,则$EF\parallel PA,EF\not\subset$平面$PAB,PA\subset$平面$PAB$,可得$EF\parallel$平面$PAB$,

因为$CF\cap EF=F$,所以平面$CFE\parallel$平面PAB,

因为$CE\subset$平面CFE,所以$CE\parallel$平面PAB.………………5 分

(2)解：因为 $PA\perp DA$，$DA\perp AB$，$PA\cap AB=A$，

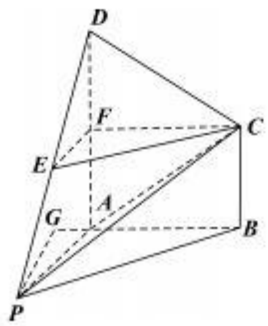
所以$DA\perp$平面PAB，

因为$DA\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAB\perp$平面$ABCD$，

过点P作直线AB的垂线，垂足为G，则$PG\perp$平面$ABCD$，

且$PG=PA\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

所以$V_{A-PCD}=V_{P-ACD}=\frac{1}{3}\times PG\times\frac{1}{2}\times DA\times CF=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.………………12 分



20. 解：由于直线与抛物线产生两个交点，于是直线的斜率一定不为0，因此：

(1)设直线AB方程为$x=my+4$, $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

把$x=my+4$与$y^2=2px$联立得$y^2-2pmy-8p=0$,

所以$y_1+y_2=2pm$, $y_1y_2=-8p$,………………2 分

由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$可得$x_1x_2+y_1y_2=(my_1+4)(my_2+4)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16$

$=-8p\left(m^2+1\right)+8pm^2+16=-8p+16=0$,

所以 $p=2$,抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.…………………6 分

(2) 假设 x 轴上存在点 $Q(t,0)$,使得点 P 到直线 AQ,BQ 的距离相等,

则 $k_{QA}+k_{QB}=0$,即 $\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=\dfrac{y_1}{my_1+4-t}+\dfrac{y_2}{my_2+4-t}$

$=\dfrac{2my_1y_2+(4-t)(y_1+y_2)}{(my_1+4-t)(my_2+4-t)}=0$,…………9 分

所以 $2my_1y_2+(4-t)(y_1+y_2)=-16pm+2pm(4-t)$

$=-2pm(4+t)=0$,

所以 $t=-4$.

所以当直线 AB 变动时,x 轴上存在点 $Q(-4,0)$,使得点 P 到直线 AQ,BQ 的距离相等.……………………………12 分

21.解:(1)因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x+1$,

所以 $f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}(x>0)$,

①当 $a\le 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

②当 $a>0$ 时,$x\in\left(0,\sqrt{a}\right)$ 时 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,$x\in\left(\sqrt{a},+\infty\right)$ 时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

综上可得,$a\le 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;$a>0$ 时 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\sqrt{a},+\infty\right)$ 上单调递增.…………5 分

(2) 证明:①解法一:因为 $g(x)=f(x)+a(\ln x-x)+\ln x=\dfrac{1}{2}x^2-ax+\ln x+1$,

所以 $g'(x)=x-a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-ax+1}{x}$,

$g(x)$ 有 2 个不同的极值点 $x_1,x_2\left(0<x_1<x_2\right)$,

则 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个根,由 $2<a<\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 得,$\Delta=a^2-4>0$,

且 $x_1+x_2=a,x_1x_2=1$,结合 $0<x_1<x_2$,可得 $0<x_1<1<x_2$,由 $x_1+x_2=x_1+\dfrac{1}{x_1}=a<\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

得$\dfrac{(x_1-e)\left(x_1-\dfrac{1}{e}\right)}{x_1}<0$，所以$\dfrac{1}{e}<x_1<1$.…………………9 分

解法二：因为$g(x)=f(x)+a(\ln x-x)+\ln x=\dfrac{1}{2}x^2-ax+\ln x+1$，

所以$g'(x)=x-a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-ax+1}{x}$，$g(x)$有 2 个不同的极值点$x_1,x_2\,(0<x_1<x_2)$，

则x_1,x_2是方程$x^2-ax+1=0$的两个根，由$2<a<e+\dfrac{1}{e}$得，$\Delta=a^2-4>0$，

且$x_1+x_2=a,x_1x_2=1$，结合$0<x_1<x_2$，可得$0<x_1<1<x_2$，

设$m(x)=x^2-ax+1=0$，因为$m\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{a}{e}+1=\dfrac{\dfrac{1}{e}+e-a}{e}>0$，$m(1)=2-a<0$，

由零点存在定理得$\dfrac{1}{e}<x_1<1$.…………………9 分

② $g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2-ax_1+\ln x_1+1-\dfrac{1}{2}x_2^2+ax_2-\ln x_2-1$

$=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)-a(x_1-x_2)+2\ln x_1$

$=-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln x_1=\dfrac{1}{2x_1^2}-\dfrac{1}{2}x_1^2+2\ln x_1\left(\dfrac{1}{e}<x_1<1\right)$.

设$h(t)=\dfrac{1}{2t^2}-\dfrac{1}{2}t^2+2\ln t\left(\dfrac{1}{e}<t<1\right)$，

则$h'(t)=-\dfrac{1}{t^3}-t+\dfrac{2}{t}=-\dfrac{(t^2-1)^2}{t^3}<0$.

故$y=h(t)$在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$单调递减，$h(t)<h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2e^2}-2$.

所以$g(x_1)-g(x_2)<\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2e^2}-2$.…………………12 分

22. 解：(1)直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=a-\dfrac{1}{2}t\end{cases}$，消去参数$t$得直线$l$普通方程为$x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3}a$，(2 分)

因为点$A(0,4)$在直线l上，所以$4\sqrt{3}=2\sqrt{3}a$，$a=2$，…………………3 分

由$\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$ 得直线l的极坐标方程$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=4\sqrt{3}$，

即 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$.…………………5 分

(2)由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=3$,即 $\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=3$,

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+3y^2=3$,即 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$,

则曲线 C 上的点 $Q\left(\sqrt{3}\cos\varphi,\sin\varphi\right)$ 到直线 l : $x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3}a$ 的距离

$d=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi-2\sqrt{3}a\right|}{2}=\dfrac{\left|\sqrt{6}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{3}a\right|}{2}$,

因为 $a>0$,则由 $|PQ|$ 最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,可得 $2\sqrt{3}a>\sqrt{6}$,所以 $d\ge\dfrac{\left|\sqrt{6}-2\sqrt{3}a\right|}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}a-\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $a=\sqrt{2}$.…………………10 分

23. 解：(1)当 $x<0$ 时, $f(x)>\dfrac{|2x|}{x}$ 等价于 $x^2+2|x-1|>-2$,该不等式恒成立,

当 $0<x\le 1$ 时, $f(x)>\dfrac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases}0<x\le 1\\ x^2-2x>0\end{cases}$,该不等式组的解集为 $\varnothing$,

当 $x>1$ 时, $f(x)>\dfrac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases}x>1\\ x^2+2x-4>0\end{cases}$,解得 $x>\sqrt{5}-1$,

综上得 $x<0$ 或 $x>\sqrt{5}-1$,

所以不等式 $f(x)>\dfrac{|2x|}{x}$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup\left(\sqrt{5}-1,+\infty\right)$.…………………5 分

(2)当 $x\ge 1$ 时 $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$,

当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得最小值 1,

当 $x<1$ 时 $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>1$,

所以 $f(x)$ 最小值为 1,所以 $a+b+c=1$,

因为 $a^2+b^2\ge\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}+ab=\dfrac{(a+b)^2}{2}$,

所以 $\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}|a+b|}{2}\ge\dfrac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$,

同理可得 $\sqrt{b^2+c^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}(b+c)}{2}$, $\sqrt{c^2+a^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}(c+a)}{2}$

所以 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+a)=\sqrt{2}$.…………10 分