文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题主要考查集合的运算.

【解析】$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$.

2.【答案】C

【命题意图】本题主要考查复数的几何意义.

【解析】因为 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})^2}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$,所以复数 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$所对应的复平面内的点为 $Z\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$,位于第三象限.

3.【答案】B

【命题意图】本题主要考查平面向量的数量积运算.

【解析】因为$|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2=9\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{b}^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9+16+24\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$,所以$|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

4.【答案】B

【命题意图】本题主要考查空间直线与平面的位置关系.

【解析】①②错误;③④正确.

5.【答案】A

【命题意图】本题主要考查古典概型.

【解析】甲、乙 2 名党员干部各自等可能地从 A,B,C,D 4 个贫困村中选择 1 个驻村扶贫,可能的结果共有如下 16 种:(A,A),(A,B),(A,C),(A,D),(B,A),(B,B),(B,C),(B,D),(C,A),(C,B),(C,C),(C,D),(D,A),(D,B),(D,C),(D,D),其中他们选择相同的贫困村驻村扶贫的结果共有如下 4 种:(A,A),(B,B),(C,C),(D,D),故他们选择不同的贫困村驻村扶贫的概率为 $1-\frac{4}{16}=\frac{3}{4}$.

6.【答案】D

【命题意图】本题主要考查逻辑推理素养以及不等式和不等关系.

【解析】因为甲和湖南人不同岁,湖南人比乙年龄小,所以丙是湖南人. 又丙比海南人年龄大,湖南人比乙年龄小,所以乙不是海南人,从而乙是河南人,甲是海南人. 于是甲、乙、丙三人中,甲是海南人且年龄最小,乙是河南人且年龄最大,丙是湖南人且年龄居中.

7.【答案】A

【命题意图】本题主要考查三角恒等变换.

【解析】$\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

8.【答案】D

【命题意图】本题主要考查函数的图像与性质.

【解析】因为 $f(x)$是奇函数,所以排除选项 B. 又 $f(x)=\frac{x^3}{3}+\sin x$,$f'(x)=x^2+\cos x$,$f''(x)=2x-\sin x$,$f'''(x)=2+\cos x>0$,所以 $f''(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $f''(0)=0$,所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$f''(x)>0$,$f'(x)$

单调递增，又 $f'(0)=1$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，从而排除选项 A 和 C.

9.【答案】D

【命题意图】本题主要考查椭圆的定义和简单几何性质.

【解析】因为在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$PF_2\perp F_1F_2$，$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，所以 $|PF_1|=2\sqrt{2}c$，$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{2}c+2c=2a$，椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}-1$.

10.【答案】C

【命题意图】本题主要考查函数的奇偶性与周期性.

【解析】因为 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，从而 $f(-x)=f(x+2)$；

因为 $f(x-1)$ 是偶函数，所以 $f(-x-1)=f(x-1)$，从而 $f(-x)=f(x-2)$.

于是 $f(x+2)=f(x-2)$，$f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

因为 $f(-x-1)=f(x-1)$，所以 $f(-x-1+4)=f(x-1+4)$，即 $f(-x+3)=f(x+3)$，

所以 $f(x+3)$ 是偶函数.

11.【答案】C

【命题意图】本题主要考查几何概型.

【解析】设小球的半径为 r，则大球的半径为 $2r$，体积为 $V=\frac{4}{3}\pi(2r)^3=\frac{32}{3}\pi r^3$，4 个小球的体积之和为 $4\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{16}{3}\pi r^3$，小球相交部分的体积 $V_1<\frac{16}{3}\pi r^3$，大球内、小球外的部分的体积 $V_2=V-\left(\frac{16}{3}\pi r^3-V_1\right)=\frac{16}{3}\pi r^3+V_1$，所以 $V_2>\frac{16}{3}\pi r^3$，从而 $p_1=\frac{V_1}{V}<\frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{\frac{32}{3}\pi r^3}=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{V_2}{V}>\frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{\frac{32}{3}\pi r^3}=\frac{1}{2}$，$p_1<p_2$，所以选项 A、B、D 错误，选项 C 正确.

12.【答案】C

【命题意图】本题主要考查三角函数的性质.

【解析】因为 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)\cdot\sin(2\pi-2x)=\sin x\cdot\sin(-2x)=-\sin x\cdot\sin 2x=-f(x)$，所以 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称，故结论 A 正确；因为 $f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)\cdot\sin(4\pi-2x)=\sin(-x)\cdot\sin(-2x)=\sin x\cdot\sin 2x=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称，故结论 B 正确；因为 $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x=2\sin^2x\cdot\cos x=2(1-\cos^2x)\cos x=-2\cos^3x+2\cos x$，令 $\cos x=t$，则 $t\in[-1,1]$，令 $g(t)=-2t^3+2t$，$t\in[-1,1]$，则 $g'(t)=-6t^2+2$，令 $g'(t)=0$，得 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$，$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，$g(-1)=0$，$g(1)=0$，所以 $g(t)$ 的最大值是 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$，从而 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$，故结论 C 错误；因为 $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)\cdot\sin(2x+4\pi)=\sin x\cdot\sin 2x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，故结论 D 正确.

二、填空题

13.【答案】$y=x+2$

【命题意图】本题主要考查导数的几何意义.

【解析】因为 $y=e^x+1$，所以 $y'=e^x$，$k=e^0=1$，从而所求切线方程为 $y=x+2$.

14.【答案】12π.

【命题意图】本题主要考查球的表面积.

【解析】设球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$，$R=\sqrt{3}$，从而球的表面积为 $S=4\pi R^2=12\pi$.

15.【答案】5

【命题意图】本题主要考查正弦定理、余弦定理以及三角形面积公式.

【解析】由正弦定理得 $\frac{b\sin A}{a\cos B}=\frac{\sin B\sin A}{\sin A\cos B}=\tan B=\frac{3}{4}$. 又 $a\cos B=4$，所以 $\cos B>0$，从而 $\cos B=\frac{4}{5}$，$a=5$.

16.【答案】$y=\pm 2x$

【命题意图】本题主要考查双曲线的定义和简单几何性质.

【解析】不妨设双曲线中心为 O，依题意，有 $|OF_1|=c$，$|F_1Q|=b$，$|OQ_1|=a$，$|F_1F_2|=2c$，$|F_1P|=2b$，$|F_2P|=2a$，由双曲线定义 $2b-2a=2a$，所以 $b=2a$，双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm 2x$.

三、解答题

17.【命题意图】本题主要考查频率分布直方图和用样本估计总体.

【解析】(1)依题意，有 $(0.0002+0.00055+a+0.0005+0.00025)\times 400=1$，…… 3 分

解得 $a=0.001$. …… 6 分

(2)该超市销售范围内消费者人均在中秋节期间的月饼购买量的估计值为

$(400\times 0.0002+800\times 0.00055+1200\times 0.001+1600\times 0.0005+2000\times 0.00025)\times 400=1208$(g).

…… 12 分

18.【命题意图】本题主要考查等比数列的概念和性质，数列求和的方法.

【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q. …… 1 分

依题意，有 $\begin{cases} a_3=a_1q^2=2, \\ a_{10}=a_1q^9=256, \end{cases}$ …… 3 分

解得 $\begin{cases} a_1=\frac{1}{2}, \\ q=2. \end{cases}$ …… 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}=2^{n-2}$. …… 6 分

(2)由(1)知，$na_n=n2^{n-2}$. …… 7 分

设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

则 $S_n=1\times 2^{-1}+2\times 2^0+\cdots+(n-1)2^{n-3}+n2^{n-2}$，…… 9 分

$2S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+\cdots+(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$. …… 10 分

两式相减得 $-S_n=(2^{-1}+2^0+\cdots+2^{n-2})-n2^{n-1}=(1-n)2^{n-1}-\frac{1}{2}$，…… 11 分

所以 $S_n=(n-1)2^{n-1}+\frac{1}{2}$. …… 12 分

19.【命题意图】本题主要考查线面垂直的判定与性质以及数学文化.

【解析】(1)因为 $\angle DCB=60^\circ$，$CD=2CB$，由余弦定理得 $BD=\sqrt{3}BC$. …… 1 分

从而 $BD^2+BC^2=CD^2$，故 $BC\perp BD$. …… 2 分

由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PD\perp BC$. …… 3 分

因为 $PD\cap BD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PBD. …… 4 分

由 $PD\perp$ 平面 BCD，$BC\perp$ 平面 PBD，可知四面体 $P\text{-}BCD$ 的四个面都是直角三角形，…… 5 分

即四面体 $P\text{-}BCD$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle PDB$，$\angle PDC$，$\angle CBD$，$\angle CBP$. …… 6 分

(2)因为 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DCB=60^\circ$，$CD=2CB$，$AD=1$，

所以 $BC=1$，$AB=2$，$\angle ABC=120^\circ$，$BD=\sqrt{3}$. …… 7 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 8 分

在$\triangle PBD$中，$PD=1$，$BD=\sqrt{3}$，$\angle PDB=90^\circ$，所以$PB=2$. …… 9分

在$\triangle PBC$中，$PB=2$，$BC=1$，$\angle PBC=90^\circ$，

所以$\triangle PBC$的面积为$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$. …… 10分

设点A到平面PBC的距离为d，则三棱锥$A\text{-}PBC$的体积为$V=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}d$.

因为$PD\perp$平面ABC，所以三棱锥$P\text{-}ABC$的体积为$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PD=\frac{\sqrt{3}}{6}$. …… 11分

所以$\frac{1}{3}d=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即点A到平面PBC的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 12分

20.【命题意图】本题主要考查曲线与方程、直线与抛物线的位置关系.

【解析】(1)设点$P(x,y)$是曲线C上任意一点，…… 1分

那么点$P(x,y)$满足$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-x=1(x>0)$. …… 3分

化简得曲线C的方程为$y^2=4x(x>0)$. …… 5分

(2)显然直线l的斜率存在. …… 6分

设直线l的方程为$y=k(x-2)+2$， …… 7分

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， …… 8分

依题意，有$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\y_2^2=4x_2.\end{cases}$ …… 9分

所以$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$， …… 10分

因为$y_1+y_2=4$，所以$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=1$. …… 11分

因此直线l的方程为$y=x$. …… 12分

21.【命题意图】本题主要考查利用导数判断函数单调性的方法和导数的几何意义.

【解析】(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. …… 1分

因为$f'(x)=e^x+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$上单调递增. …… 2分

因为$f(-1)=\frac{1}{e}>0$，$f(-2)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{3}<0$， …… 3分

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上有唯一零点$x_1(-2<x_1<-1)$，即$f(x_1)=0$，$e^{x_1}=\frac{x_1+1}{x_1-1}$. …… 4分

又$1<-x_1<2$，$f(-x_1)=e^{-x_1}-\frac{-x_1+1}{-x_1-1}=\frac{x_1-1}{x_1+1}+\frac{-x_1+1}{x_1+1}=0$， …… 5分

故$f(x)$在$(1,+\infty)$上有唯一零点$-x_1$.

综上，$f(x)$有且仅有两个零点. …… 6分

(2)因为$-x_0=\ln e^{-x_0}$，故点$B(e^{-x_0},-x_0)$在曲线$y=\ln x$上. …… 7分

由题设知$f(x_0)=0$，即$e^{x_0}=\frac{x_0+1}{x_0-1}$， …… 8分

故直线AB的斜率$k=\frac{-x_0-e^{x_0}}{e^{-x_0}-x_0}=\frac{-x_0-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{\frac{x_0-1}{x_0+1}-x_0}=\frac{x_0+1}{x_0-1}=e^{x_0}$. …… 9分

曲线 $y=\ln x$ 在点 $B(e^{-x_0},-x_0)$ 处切线的斜率是 e^{x_0}，曲线 $y=e^x$ 在点 $A(x_0,e^{x_0})$ 处切线的斜率也是 e^{x_0}，
…… 11 分

所以曲线 $y=e^x$ 在点 $A(x_0,e^{x_0})$ 处的切线也是曲线 $y=\ln x$ 的切线. …… 12 分

22.【命题意图】本题主要考查参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化.

【解析】(1)因为 $-1<\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant 1$，且 $x^2+y^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$，

所以 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1(x\neq -1)$. …… 3 分

l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y+4=0$. …… 5 分

(2)由(1)可设 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数，$-\pi<\alpha<\pi$). …… 6 分

C 上的点到 l 的距离为 $\frac{|\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha+4|}{2}=\frac{2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+4}{2}$. …… 8 分

当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+4$ 取得最大值 6，故 C 上的点到 l 距离的最大值为 3. …… 10 分

23.【命题意图】本题主要考查不等式的证明和基本不等式的应用.

【解析】(1)因为 a,b 为正数，且 $a+b=1$，

所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. …… 2 分

所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{a+b+1}{ab}=1+\frac{2}{ab}\geqslant 9$， …… 4 分

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. …… 5 分

(2)不妨设 $a=\frac{1}{2}+\delta,b=\frac{1}{2}-\delta,0\leqslant\delta<\frac{1}{2}$， …… 7 分

则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=\frac{\left(\delta^2+\delta+\frac{5}{4}\right)\left(\delta^2-\delta+\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}\delta^2+\delta^4}{\frac{1}{4}-\delta^2}\geqslant\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}$. … 9 分

当且仅当 $\delta=0$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. …… 10 分