2021年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 z 满足 $z+i(1-i)\in \mathbf{R}$，则 z 的虚部为

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-$i

2. 已知 m,n 是平面 α 内的两条相交直线，且直线 $l\perp n$，则“$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 根据某医疗研究所的调查，某地区居民血型的分布为 O 型 49%，A 型 19%，B 型 25%，AB 型 7%. 已知同种血型的人可以互相输血，O 型血的人可以给任何一种血型的人输血，AB 型血的人可以接受任何一种血型的血，其他不同血型的人不能互相输血. 现有一血型为 B 型的病人需要输血，若在该地区任选一人，则能为该病人输血的概率为

A. 25%　　B. 32%　　C. 74%　　D. 81%

4. 已知正数 a,b 是关于 x 的方程 $x^2-(m^2+4)x+m=0$ 的两根，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

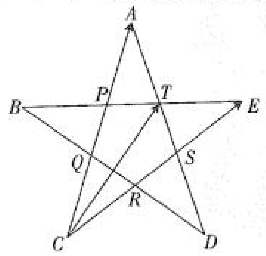
5. 已知 $a=\log_3 15$，$b=\log_4 20$，$2^c=1.9$，则

A. $a>c>b$　　B. $c>a>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

6. 当前，新冠肺炎疫情进入常态化防控新阶段，防止疫情输入的任务依然繁重，疫情防控工作形势依然严峻、复杂. 某地区安排 A,B,C,D,E 五名同志到三个地区开展防疫宣传活动，每个地区至少安排一人，且 A,B 两人安排在同一个地区，C,D 两人不安排在同一个地区，则不同的分配方法总数为

A. 86 种　　B. 64 种　　C. 42 种　　D. 30 种

7. 庄严美丽的国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征，正五角星是一个非常优美的几何图形，且与黄金分割有着密切的联系. 在如图所示的正五角星中，以 A,B,C,D,E 为顶点的多边形为正五边形，且 $\frac{PT}{AT}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则



A. $\overrightarrow{CT}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{CE}$

B. $\overrightarrow{CT}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CE}$

C. $\overrightarrow{CT}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{CE}$

D. $\overrightarrow{CT}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CE}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\sin \pi x$，且满足当 $x>1$ 时，$f(x)=2f(x-2)$，若对任意 $x\in[-m,m]$，$f(x)\leqslant 2\sqrt{3}$ 成立，则 m 的最大值为

A. $\frac{23}{6}$　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{25}{6}$　　D. $\frac{13}{3}$

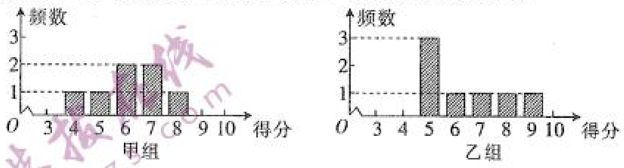
二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A=\{x|\log_2 x<1\}$，$B=\{x|4-3x>0\}$，则

A. $A\cap B=\{x|0<x<\frac{4}{3}\}$　　B. $A\cup B=\{x|x<2\}$

C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|x<\frac{4}{3}$ 或 $x>2\}$

10. 为了普及环保知识，增强环保意识，某学校分别从两个班各抽取 7 位同学分成甲、乙两组参加环保知识测试，得分(十分制)如图所示，则下列描述正确的有



A. 甲、乙两组成绩的平均分相等

B. 甲、乙两组成绩的中位数相等

C. 甲、乙两组成绩的极差相等

D. 甲组成绩的方差小于乙组成绩的方差

11. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-\sin 2x$，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则

A. $x_1^2>x_2^2$　　B. $e^{x_1-x_2}>1$　　C. $\ln|x_1|>\ln|x_2|$　　D. $x_1|x_1|>x_2|x_2|$

12. 已知 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为椭圆上任意一点(不在 x 轴上)，$\triangle PF_1F_2$ 外接圆的圆心为 H，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心为 I，直线 PI 交 x 轴于点 M，O 为坐标原点. 则

A. $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为 $\frac{a^2}{2}$　　B. $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为 $\frac{a^2}{4}$

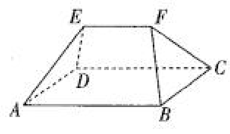
C. 椭圆 C 的离心率等于 $\frac{|PI|}{|IM|}$　　D. 椭圆 C 的离心率等于 $\frac{|IM|}{|PI|}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，若 $a_4a_6=2a_5$，则 $T_9=$ ▲ .

14. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点，若双曲线 C 上存在一点 M 满足 $|MF_1|:|MF_2|:|F_1F_2|=12:13:5$，则该双曲线的离心率为 ▲ .

15. 我国古代数学名著《九章算术》中记载："刍甍者，下有袤有广，而上有袤无广. 刍，草也. 甍，屋盖也."现有一个刍甍如图所示，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，上棱 $EF=2\sqrt{2}$，四边形 $ABFE$，$CDEF$ 为两个全等的等腰梯形，EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 2，则该刍甍外接球的表面积为 ▲ .



16. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域内存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=1$ 成立，则称该函数为"互补函数". 若函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}\sin(\omega x+\frac{2\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上为"互补函数"，则 ω 的取值范围为 ▲ .

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

在①$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，②$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$，$S_7=4a_7=28$，③$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，$S_3=6$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中，并加以解答．

问题：设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，________，若 $b_n=\frac{a_n}{2^{a_n}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18.（12 分）

全球变暖已经是近在眼前的国际性问题，冰川融化、极端气候的出现、生物多样性减少等等都会给人类的生存环境带来巨大灾难．某大学以对于全球变暖及其后果的看法为内容制作一份知识问卷，并邀请 40 名同学(男女各占一半)参与问卷的答题比赛，将同学随机分成 20 组，每组男女同学各一名，每名同学均回答同样的五个问题，答对一题得一分，答错或不答得零分，总分 5 分为满分．最后 20 组同学得分如下表：

组别号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
男同学得分	4	5	5	4	5	5	4	4	5	5
女同学得分	3	4	5	5	5	4	5	5	5	3
组别号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
男同学得分	4	4	4	4	4	4	5	5	4	3
女同学得分	5	5	4	5	4	3	5	3	4	5

(1)完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 90%的把握认为"该次比赛是否得满分"与"性别"有关；

	男同学	女同学	总计
该次比赛得满分			
该次比赛未得满分			
总计			

(2)随机变量 X 表示每组男生分数与女生分数的差，求 X 的分布列与数学期望．

参考公式和数据：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.010
k	2.706	3.841	6.635

19.（12 分）

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$A=\frac{\pi}{4}$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$a+b=7\sqrt{2}$．

(1)求 a,b 的值；

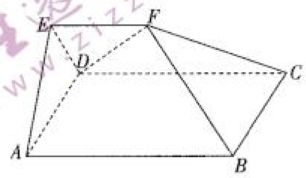
(2)已知 D,E 分别在边 BA,BC 上，且 $AD+CE=4\sqrt{2}$，求$\triangle BDE$面积的最大值．

20.（12分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$\triangle ADE$ 为等边三角形，且平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，BF 和平面 $ABCD$ 所成的角为 45°，且点 F 在平面 $ABCD$ 上的射影落在四边形 $ABCD$ 的中心，且 $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

(1)证明：$EF//$平面 $ABCD$.

(2)求平面 AED 与平面 BCF 所成角(锐角)的余弦值.



21.（12分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，F 为其焦点，$P(1,y)(y>0)$，A,B 三点都在抛物线 C 上，且 $|FP|=2$，设直线 AB,PA,PB 的斜率分别为 k,k_1,k_2.

(1)求抛物线 C 的方程，并证明 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k}+1$；

(2)已知 $M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，且 A,B,M 三点共线，若 $PA\perp PB$，$k_1>k_2$，求直线 PA 的方程.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)>\frac{1}{x}-e^{1-x}+a$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数学参考答案

1. B 【解析】本题考查复数的四则运算，考查运算求解能力.

$i(1-i)=1+i$，又 $z+i(1-i)\in\mathbf{R}$，所以 z 的虚部为 -1.

2. A 【解析】本题考查线与面的位置关系，考查空间想象能力.

当 $l\perp m$ 时，因为 m,n 是平面 α 内的两条相交直线，$l\perp n$，所以 $l\perp\alpha$；

当 $l\perp\alpha$ 时，因为 $m\subset\alpha$，所以 $l\perp m$. 综上，"$l\perp m$"是"$l\perp\alpha$"的充要条件.

3. C 【解析】本题考查概率的运算，考查运算求解能力.

由题意可知，能为 B 型血病人输血的有 O 型和 B 型，

因此，在该地区任选一人，能为病人输血的概率为 $49\%+25\%=74\%$.

4. C 【解析】本题考查基本不等式，考查运算求解能力.

$a+b=m^2+4$，$ab=m>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=m+\frac{4}{m}\geqslant 4$，当且仅当 $m=2$ 时等号成立，经检验知当 $m=2$ 时，方程 $x^2-(m^2+4)x+m=0$ 有两个正实数解.

5. D 【解析】本题考查指数、对数的比较大小，考查运算求解能力.

$a=\log_3 15=1+\log_3 5$，$b=\log_4 20=1+\log_4 5$，$c=\log_2 1.9<1$，所以 $a>b>c$.

6. D 【解析】本题考查排列组合的应用，考查逻辑推理能力.

①当两个地区各分 2 人另一个地区分 1 人时，总数有 $C_2^1\cdot A_3^3=12$ 种；

②当两个地区各分 1 人另一个地区分 3 人时，总数有 $C_3^1\cdot A_3^3=18$ 种.

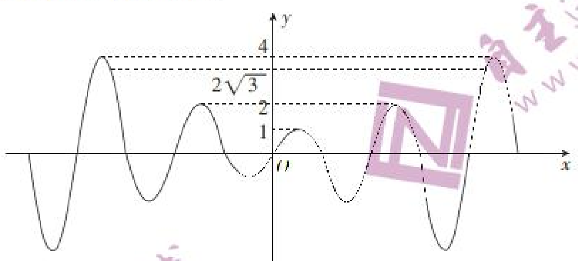
故满足条件的分法共有 $12+18=30$ 种.

7. A 【解析】本题考查平面向量的运算，考查逻辑推理能力.

$\overrightarrow{CT}=\frac{2}{\sqrt5+1}\overrightarrow{CP}+\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\overrightarrow{CE}=\frac{2}{\sqrt5+1}\cdot\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5+3}\overrightarrow{CA}+\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\overrightarrow{CE}=\frac{2}{\sqrt5+3}\overrightarrow{CA}+\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\overrightarrow{CE}=\frac{3-\sqrt5}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3-\sqrt5}{2}\overrightarrow{CE}$.

8. B 【解析】本题考查函数的性质，考查数形结合的数学思想.

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\sin\pi x$，则 $f(x)=\sin\pi x$，$x\in[-1,1]$，又当 $x>1$ 时，$f(x)=2f(x-2)$，可画出函数图象如图所示.



由图知，当 $3\leqslant x\leqslant 5$ 时，$f(x)=4f(x-4)=4\sin(\pi x-4\pi)=4\sin\pi x$，则当 $-5\leqslant x\leqslant -3$ 时，$f(x)=-f(-x)=4\sin\pi x$. 当 $-5\leqslant x\leqslant -3$ 时，令 $4\sin\pi x=2\sqrt3$，解得 $x_1=-\frac{10}{3}$，$x_2=-\frac{11}{3}$（舍去）. 若对任意 $x\in[-m,m]$，$f(x)\leqslant 2\sqrt3$ 成立，所以 m 的最大值为 $\frac{10}{3}$.

9. AB 【解析】本题考查集合的运算，考查运算求解能力.

$A=\{x|\log_2 x<1\}=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|4-3x>0\}=\{x|x<\frac{4}{3}\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<\frac{4}{3}\}$，$A\cup B=\{x|x<2\}$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|x<\frac{4}{3}$ 或 $x\geqslant 2\}$，故选 AB.

10. BCD 【解析】本题考查统计，考查数据分析能力.

因为$\frac{4+5+6+6+7+7+8}{7}<\frac{5+5+5+6+7+8+9}{7}$，所以甲组成绩的平均分小于乙组成绩的平均分，甲、乙两组成绩的中位数都为 6，甲、乙两组成绩的极差都为 4，甲组的成绩比乙组更加稳定，所以甲组成绩的方差小于乙组成绩的方差，故选 BCD.

11. BD 【解析】本题考查导数与函数的单调性，考查化归与转化的数学思想和推理论证能力.

因为 $f(-x)=e^{-x}-e^{x}+\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

又 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\cos 2x\geqslant 2-2\cos 2x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(x_1)>f(x_2)$ 可得 $x_1>x_2$，所以 $e^{x_1-x_2}>1$，B 正确.

又因为函数 $y=x|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x_1|x_1|>x_2|x_2|$，D 正确.

12. AD 【解析】本题考查椭圆的定义以及几何性质，考查运算求解能力.

过点 H 做 $HG\perp PF_1$（图略），垂足为 G，则 G 为 PF_1 的中点，

所以$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\frac{|\overrightarrow{PF_1}|^2}{2}$，同理$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{|\overrightarrow{PF_2}|^2}{2}$，

所以$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PO}=\frac{\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{2}=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2)\geqslant\frac{1}{2}(\frac{|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|}{2})^2=\frac{a^2}{2}$，

当且仅当$|\overrightarrow{PF_1}|=|\overrightarrow{PF_2}|$时取等号.

连接 IF_1，IF_2，则 IF_1，IF_2 分别为$\angle PF_1F_2$，$\angle PF_2F_1$ 的角平分线，由角平分线定理可知，$\frac{|IM|}{|PI|}=\frac{|F_1M|}{|PF_1|}=\frac{|F_2M|}{|PF_2|}$，则$\frac{|IM|}{|PI|}=\frac{|F_1M|+|F_2M|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{2c}{2a}=e$，故选 AD.

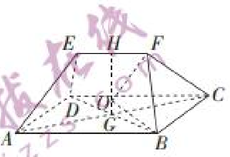
13. 512 【解析】本题考查等比数列，考查运算求解能力.

因为 $a_4a_6=2a_5$，所以 $a_5=2$，则 $T_9=2^9=512$.

14. 5 【解析】本题考查双曲线的定义，考查推理论证能力和运算求解能力.

双曲线的离心率 $e=\frac{|F_1F_2|}{|MF_2|-|MF_1|}=\frac{5}{13-12}=5$.

15. 33π 【解析】本题考查空间几何体的外接球，考查空间想象能力和运算求解能力.



连接 AC，BD 相交于点 G，取 EF 的中点 H，连接 GH，易得 $HG\perp$平面 $ABCD$，则该刍甍外接球的球心 O 在直线 HG 上，设该刍甍外接球的半径为 R，$OH=x$，则

$\begin{cases}R^2=2+x^2,\\R^2=(2\sqrt{2})^2+(2-x)^2,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{5}{2}$，$R^2=\frac{33}{4}$，所以该刍甍外接球的表面积为 $4\pi R^2=33\pi$.

16. $[\frac{9}{4},\frac{5}{2}]\cup[\frac{13}{4},+\infty)$ 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质，考查运算求解能力.

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\sin\omega x$，

令 $t=\omega x$，则函数 $y=\sin t$ 在区间$[\omega\pi,2\omega\pi]$上存在两个极大值点，则$\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\pi$，得 $\omega\geqslant 2$.

当 $2T=2\times\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\pi$ 时，即 $\omega\geqslant 4$，显然符合题意；

当 $\omega\pi\leqslant\frac{5\pi}{2}$，即 $\omega\leqslant\frac{5}{2}$ 时，$2\omega\pi\geqslant\frac{9\pi}{2}$，即 $\omega\geqslant\frac{9}{4}$，所以$\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}$；

当 $4\pi>\omega\pi>\frac{5\pi}{2}$，即 $\omega>\frac{5}{2}$ 时，$2\omega\pi\geqslant\frac{13\pi}{2}$，即 $\omega\geqslant\frac{13}{4}$，所以$\frac{13}{4}\leqslant\omega<4$.

综上，ω 的取值范围为$[\frac{9}{4},\frac{5}{2}]\cup[\frac{13}{4},+\infty)$.

17. 解：选①

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，……………………………………………………

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n$，………………………… 3分

又 $n=1$ 满足 $a_n=n$，所以 $a_n=n$. ………………………… 5分

$b_n=\frac{a_n}{2^{a_n}}=\frac{n}{2^n}=n\cdot(\frac{1}{2})^n$，………………………… 6分

则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=1\times(\frac{1}{2})^1+2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，………………………… 8分

所以 $\frac{1}{2}T_n=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，

故 $T_n=2-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^n$. ………………………… 10分

选②

因为 $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列，………………………… 2分

设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $S_7=7a_1+21d=28$，$a_7=a_1+6d=7$，………………………… 4分

解得 $a_1=1$，$d=1$，所以 $a_n=n$. ………………………… 5分

$b_n=\frac{a_n}{2^{a_n}}=\frac{n}{2^n}=n\cdot(\frac{1}{2})^n$，………………………… 6分

则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=1\times(\frac{1}{2})^1+2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，………………………… 8分

所以 $\frac{1}{2}T_n=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，

故 $T_n=2-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^n$. ………………………… 10分

选③

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}$，即 $a_n=na_1$. ………………………… 2分

$S_3=a_1+a_2+a_3=6a_1=6$，所以 $a_1=1$，………………………… 3分

所以 $a_n=n$. ………………………… 5分

$b_n=\frac{a_n}{2^{a_n}}=\frac{n}{2^n}=n\cdot(\frac{1}{2})^n$，………………………… 6分

则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=1\times(\frac{1}{2})^1+2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，………………………… 8分

所以 $\frac{1}{2}T_n=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，

故 $T_n=2-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^n$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1)2×2 列联表如下：

	男同学	女同学	总计
该次比赛得满分	8	11	19
该次比赛未得满分	12	9	21
总计	20	20	40

………………………………………… 3 分

所以，$K^2=\frac{40\times(8\times9-11\times12)^2}{19\times21\times20\times20}\approx0.902<2.706$, ………………………… 5 分

所以没有 90%的把握认为“该次大赛是否得满分”与“性别”有关.

(2)X 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2$. ………………………… 6 分

$P(X=-2)=\frac{1}{20}$, $P(X=-1)=\frac{3}{10}$, $P(X=0)=\frac{7}{20}$, $P(X=1)=\frac{1}{5}$, $P(X=2)=\frac{1}{10}$, ………… 9 分

则 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=(-2)\times\frac{1}{20}+(-1)\times\frac{3}{10}+0\times\frac{7}{20}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{10}=0$. ………… 12 分

19. 解：(1)因为 $\cos B=\frac{1}{3}$，所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 1 分

由正弦定理，$a+b=7\sqrt{2}$ 可化为 $2R(\sin A+\sin B)=7\sqrt{2}$, ………………………… 3 分

解得 $2R=6$. ………………………… 4 分

$a=2R\sin A=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$, ………………………… 5 分

$b=2R\sin B=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$. ………………………… 6 分

(2)$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$. ………………………… 7 分

$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，解得 $c=4+\sqrt{2}$. ………………………… 9 分

因为 $AD+CE=4\sqrt{2}$，所以 $BD+BE=4+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=4$, ………………………… 10 分

$\triangle BDE$ 的面积 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\cdot\sin B=\frac{\sqrt{2}}{3}BD\cdot BE\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{BD+BE}{2})^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $BD=BE=2$ 时，取得最大值. ………………………… 12 分

20. (1)证明：连接 BD，取 AD、BD 的中点分别为 O、G，连接 EO、OG、GF，易得 G 为四边形 $ABCD$ 的中心，所以 $FG\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 1 分

设 $AD=2$，因为 BF 和平面 $ABCD$ 所成的角为 45°，所以 $\angle FBG=45°$，因为 $BG=\frac{BD}{2}=\sqrt{3}$，所以 $FG=\sqrt{3}$.

………………………… 2 分

又因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$EO\perp AD$,

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，$EO=\sqrt{3}$，则 $EO=FG$，$EO/\!/FG$， …………………………………… 4 分

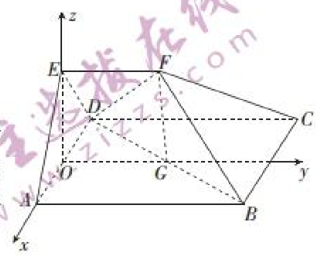
所以四边形 $EOGF$ 是平行四边形，所以 $EF/\!/OG$. …………………………………………… 5 分

因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$OG\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：在平面 $ABCD$ 中，作 $Oy\perp AD$，

如图，以 O 为坐标原点，OA，Oy，OE 所在直线分别为 x，y，z 轴建系，



则 $A(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$B(1,2\sqrt{2},0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，$F(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………………… 7 分

又因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 是平面 ADE 的一个法向量. ………………………………………………………………………………… 8 分

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BF}=(-1,-\sqrt{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，

所以 $\begin{cases}-2x=0,\\-x-\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=\sqrt{3},\\z=\sqrt{2},\end{cases}$

所以平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$. …………………………………………… 10 分

记平面 AED 与平面 BCF 所成的角为 θ，

所以 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 AED 与平面 BCF 所成角(锐角)的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 12 分

21. 解：(1) $|FP|=1+\dfrac{p}{2}=2$，所以 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，点 $P(1,2)$. ……………… 2 分

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_1=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，同理 $k_2=\dfrac{4}{y_2+2}$，$k=\dfrac{4}{y_1+y_2}$， ……………… 4 分

所以 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{y_1+y_2+4}{4}$，$\dfrac{1}{k}+1=\dfrac{y_1+y_2+4}{4}$，则 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{k}+1$. ……………………… 6 分

(2)设直线 AB 的方程为 $x+\dfrac{1}{2}=m(y+\dfrac{1}{2})$ $(m=\dfrac{1}{k})$，

联立 $\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}=m(y+\dfrac{1}{2}),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4my-2m+2=0$.

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=2-2m$，

依题意，可得 $\Delta=(4m)^2-4(2-2m)>0$，解得 $m<-1$ 或 $m>\dfrac{1}{2}$. ………………………………… 8 分

因为 $PA\perp PB$，所以 $k_1k_2=\dfrac{16}{(y_1+2)(y_2+2)}=-1$，解得 $m=-\dfrac{11}{3}$. ………………………………… 10 分

又 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{k}+1$，所以 $\dfrac{1}{k_1}-k_1=-\dfrac{8}{3}$，且 $k_1>k_2$，所以 $k_1=3$，

所以直线 PA 的方程为 $y-2=3(x-1)$，即 $3x-y-1=0$. …………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意可得 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}(x>0)$. ……………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$；由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$.

$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增. ……………………………………………… 4分

(2)因为$f(x)>\frac{1}{x}-e^{1-x}+a$在$(1,+\infty)$上恒成立，所以$ax-\ln x>\frac{1}{x}-e^{1-x}+a$在$(1,+\infty)$上恒成立，

所以$ax-\ln x-a>\frac{e^{x-1}-x}{xe^{x-1}}$在$(1,+\infty)$上恒成立. ……………………………………………… 5分

设$h(x)=e^{x-1}-x(x>1)$，则$h'(x)=e^{x-1}-1>0$，则$h(x)$在$(1,+\infty)$上的单调递增.

因为$h(1)=0$，所以$h(x)>0$. ……………………………………………… 6分

设$g(x)=ax-\ln x-a$，则$g'(x)=a-\frac{1}{x}$.

当$a\leqslant 0$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

因为$g(1)=0$，所以$g(x)<0$，所以$ax-\ln x-a<\frac{e^{x-1}-x}{xe^{x-1}}$，故$a\leqslant 0$不符合题意. ……………… 7分

当$0<a<1$时，由(1)可知$g(x)$在$(1,\frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增，

则$g(\frac{1}{a})<g(1)=0$. 从而$\exists x\in(1,+\infty)$，$ax-\ln x-a<\frac{e^{x-1}-x}{xe^{x-1}}$，故$0<a<1$不符合题意. ……… 8分

当$a\geqslant 1$时，设$\varphi(x)=ax-\ln x-a-\frac{1}{x}+e^{1-x}(x>1)$，则$\varphi'(x)=a-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-e^{1-x}(x>1)$.

因为$h(x)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，所以$e^{x-1}>x$，所以$e^{1-x}<\frac{1}{x}$，

则$\varphi'(x)=a-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-e^{1-x}>a-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-2x+1}{x^2}$. ……………………………… 9分

因为$a\geqslant 1$，所以$ax^2-2x+1\geqslant x^2-2x+1>0$，所以$\varphi'(x)>0$，

则$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，从而$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

即$ax-\ln x-a>\frac{e^{x-1}-x}{xe^{x-1}}$，故$a\geqslant 1$符合题意. ……………………………………………… 11分

综上，a的取值范围为$[1,+\infty)$. ……………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》