# 河北衡水中学2021届全国高三第二次联合考试(Ⅰ)

# 理科数学

**本试卷4页。总分150分。考试时间120分钟。**

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

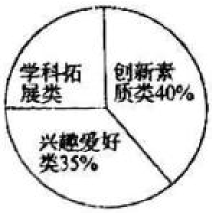
1. 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2>0\}$，$N=\{-2,0,1,2,5\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-2,5\}$　　C. $\{-2,2,5\}$　　D. $\{0,1,2\}$

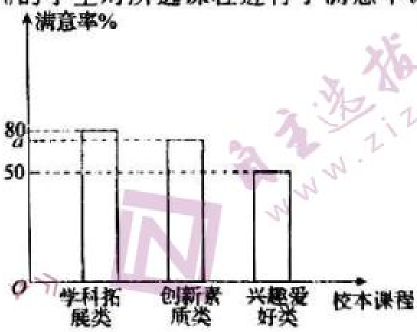
2. 若复数 $z=\dfrac{10i}{2+i}$，则 $|z+1|=$

A. 25　　B. 7　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

3. 某校为更好地支持学生个性发展，开设了学科拓展类、创新素质类、兴趣爱好类三种类型的校本课程，每位同学从中选择一门课程学习，现对该校6 000名学生的选课情况进行了统计，如图①，并用分层抽样的方法从中抽取2%的学生对所选课程进行了满意率调查，如图②.




①




②

则下列说法错误的是

A. 抽取的样本容量为120

B. 该校学生中对兴趣爱好类课程满意的人数约为1 050

C. 若抽取的学生中对创新素质类课程满意的人数为36，则 $a=70$

D. 该校学生中选择学科拓展类课程的人数为1 500

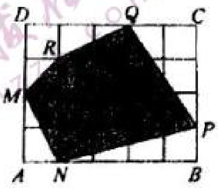
4. 若变量 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x+2y-1\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+\sqrt{3}y$ 的最大值为

A. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

5. 已知 $\overrightarrow{AB}=(-1,\cos\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(2,2\sin\alpha)$，若 $A,B,D$ 三点共线，则 $\tan\alpha=$

A. $-2$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

6. 如图，每个小正方形的边长为1，小正方形的顶点称为"格点"，如果一个多边形的每一个顶点都在格点上，则称该多边形为"格点多边形"．1899年奥地利数学家匹克(Pick)对格点多边形面积计算提出匹克定理，设格点多边形内部含有 $N$ 个格点，边界上含有 $L$ 个格点，则该格点多边形的面积 $S=N+\frac{L}{2}-1$．在矩形 $ABCD$ 内随机取一点，此点取自格点多边形 $MNPQR$ 内的概率为




A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{11}{20}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{23}{40}$

7. 记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，若 $S_6=3(a_5+3)$，且 $a_4=-1$，则 $\{a_n\}$ 的公差为

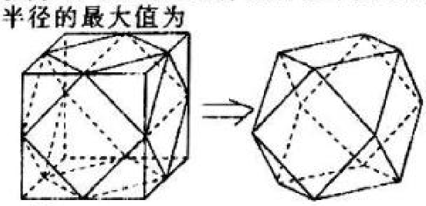
A. $-2$　　B. 0　　C. 2　　D. 4

8. 设 $a=\log_6 4$，$b=\ln 2$，$c=\pi^{0.2}$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

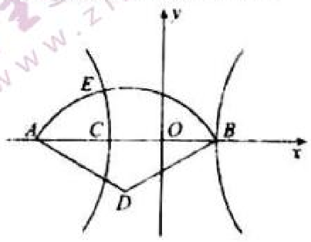
C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

9. 某市在文化广场举办"爱我家乡，知我家乡"活动，需要对广场内的部分休闲石凳进行更换．为响应"厉行节约"的号召，市政公司打算旧物利用，将旧石凳打磨成球体，放置在附近的喷泉池中．已知旧石凳是由棱长为 40 cm 的正方体经各棱中点切割下八个相同的四面体所得，如图所示．则打磨后的球体半径的最大值为



A. 20 cm　　B. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm　　C. $20\sqrt{2}$ cm　　D. $20\sqrt{3}$ cm

10. 三等分角是"古希腊三大几何问题"之一，数学家帕普斯巧妙地利用圆弧和双曲线解决了这个问题．如图，在圆 $D$ 中，$AB$ 为其一条弦，$\angle ADB=120°$，$C$，$O$ 是弦 $AB$ 的两个三等分点，以 $A$ 为左焦点，$B$，$C$ 为顶点作双曲线 $T$．设双曲线 $T$ 与弧 $AB$ 的交点为 $E$，则 $\angle ADE=\frac{1}{3}\angle ADB=40°$．若 $T$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1(a>0)$，则圆 $D$ 的半径为




A. $3\sqrt{2}$

B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

C. $\sqrt{6}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，则

A. $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心

C. 任取方程 $f(x)=1$ 的两个根 $x_1,x_2$，则 $|x_1-x_2|$ 是 $\pi$ 的整数倍

D. 对于任意的 $x_1,x_2,x_3\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$ 恒成立

12. 已知函数 $f(x)=|2^x-1|$，$g(x)=-x^2-2x+11$，$h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$，则以下关于 $x$ 的方程 $h(x)=k$（$k$ 为整数）根的说法正确的是

A. 当 $k=2$ 时，方程有 2 个根

B. 当 $4\leqslant k<11$ 时，方程有 4 个根

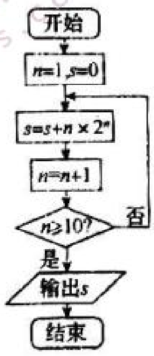
C. 当 $k=7$ 时，方程所有根的和为 1

D. 当方程有两个根时，$k=3$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为________。

14. 如图，执行该程序框图，则输出 $s$ 的值为________。




15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，直线 $l:2x+2y-p=0$ 与抛物线 $C$ 交于 $A,B$ 两点，且 $|BF|=1+|AF|$，则 $|AB|=$________。

16. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x(f'(x)-\ln x)$，且 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，若不等式 $f(x)\geqslant ax$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围是________。

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

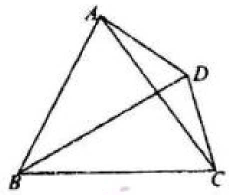
**（一）必考题：共 60 分。**

17.（12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$\angle BAD=\angle BCD=75^\circ$，$BC=2$，$CD=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，连接 $AC$。

（1）求 $BD$；

（2）设 $\angle BAC=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，求 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ 的值。




18.（12 分）

N95 型口罩，指可以对空气动力学直径物理直径为 0.075 μm±0.020 μm 的颗粒的过滤效率达到 0.95 以上的口罩。疫情发生后，全国 N95 型口罩市场供应紧缺。某医疗科技有限公司立即扩大产能，在原来 $A$ 生产线的基础上，增设 $B$ 生产线。为疫情防控一线供应医用 N95 口罩。为了监控口罩生产线的生产过程，检验员每天需要从两条生产线上分别随机抽取口罩检测过滤效率。公司规定过滤效率大于 0.970 的产品为一等品，并根据检验员抽测产品中一等品的数量对两条生产线进行评价。下面是该检验员某一天抽取的 20 个口罩的过滤效率值：

$A$ 生产线口罩过滤效率

| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 过滤效率 | 0.958 | 0.967 | 0.964 | 0.976 | 0.956 | 0.973 | 0.965 | 0.968 | 0.972 | 0.973 |

$B$ 生产线口罩过滤效率

| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 过滤效率 | 0.978 | 0.982 | 0.974 | 0.966 | 0.976 | 0.982 | 0.977 | 0.974 | 0.976 | 0.972 |

（1）根据检验员抽测的数据，完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 95% 的把握认为生产线与所生产的产品为一等品有关？

| 生产线 | 产品是一等品 | 产品不是一等品 | 总计 |
|---|---|---|---|
| A | | | |
| B | | | |
| 总计 | | | |

(2)将检验员抽测产品中一等品的频率视为概率，从 $A$，$B$ 两条生产线生产的产品中各抽取 1 件，设 $X$ 为其中一等品的件数，求 $X$ 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

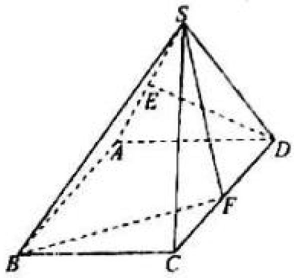
| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle CBA=\dfrac{\pi}{3}$，$SA=SD=2$，$E$，$F$ 分别为 $SA$，$CD$ 的中点.

(1)证明：$DE\parallel$ 平面 $SBF$；

(2)若 $SF=2$，求二面角 $A\text{-}SB\text{-}F$ 的余弦值.




20.（12 分）

已知 $F_1$，$F_2$ 分别为椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，$A$ 为 $C$ 的上顶点，$AF_1\perp AF_2$，且 $\triangle AF_1F_2$ 的面积等于 1.

(1)求 $C$ 的方程；

(2)若过点 $A$ 的直线 $l_1$ 交 $C$ 于另外一点 $M$，$l_1$ 关于直线 $AF_1$ 对称的直线为 $l_2$，$l_2$ 交 $C$ 于另外一点 $N$（异于点 $M$），证明：直线 $MN$ 过定点.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^{-x}-x-a\ln x$.

(1)当 $a=-1$ 时，证明：$f(x)>\dfrac{1}{e}-1$ 有解；

(2)若对任意 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant x^a$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围.

**(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。**

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］(10 分)

在直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\ y=\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点 $O$ 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta-2\sin\theta=0$.

(1)求曲线 $C_2$ 的直角坐标方程；

(2)求曲线 $C_1$，$C_2$ 公共点的直角坐标.

23.［选修 4—5：不等式选讲］(10 分)

已知函数 $f(x)=|x-1|+|x-3|$.

(1)求不等式 $f(x)>6$ 的解集；

(2)若实数 $a$，$b$ 满足 $3a+4b=12$，试比较 $11-f(x)$ 与 $(a+1)^2+b^2$ 的大小，并说明理由.

# 衡中同卷 参考答案及解析

## 河北衡水中学2021届全国高三第二次联合考试(Ⅰ)·理科数学

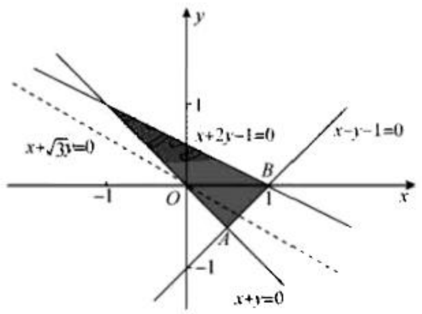
一、选择题

1. B 【解析】由题意得 $M=\{x|x<-1,或x>2\}$,所以 $M\cap N=\{-2,5\}$.

2. C 【解析】因为 $z=\frac{10i}{2+i}=\frac{(2-i)10i}{(2+i)(2-i)}=2+4i$,所以 $|z+1|=|3+4i|=5$.

3. C 【解析】抽取的样本容量为 $6\,000\times 2\%=120$,故A正确;该校学生中对兴趣爱好类课程满意的人数约为 $6\,000\times 35\%\times 50\%=1\,050$,故B正确;根据题意,创新素质类课程的满意率为 $\frac{36}{6\,000\times 40\%\times 2\%}=75\%$,$a=75$,故C错误;该校学生中选择学科拓展类课程的人数为 $6\,000\times 25\%=1\,500$,故D正确.

4. C 【解析】作出不等式组 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x+2y-1\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域,如图中阴影部分所示.




由图易知,当直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}z$ 过点 $B(1,0)$ 时,$z$ 最大,最大值为1.

5. A 【解析】由题意得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(4,2\sin\alpha)$,又 $A,B,D$ 三点共线,所以 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{BD}$,即 $-2\sin\alpha=4\cos\alpha$,所以 $\tan\alpha=-2$.

6. D 【解析】由题图可得格点多边形 $MNPQR$ 内的格点数为10,边界上的格点数为5,故该格点多边形的面积 $S=11.5$,矩形 $ABCD$ 的面积为20,故在矩形 $ABCD$ 内随机取一点,此点取自格点多边形 $MNPQR$ 内的概率为 $\frac{11.5}{20}=\frac{23}{40}$.

7. A 【解析】因为 $S_6=\frac{a_1+a_6}{2}\times 6=3(a_1+a_6)$,所以 $a_1+a_6=a_5+3$,所以 $a_2=3$,因为 $a_1=-1=3+2d$,所以 $d=-2$.

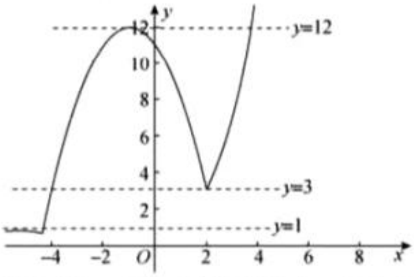
8. B 【解析】因为 $0<a<1,0<b<1,c>1$,且 $a=\log_a 4>\log_{e^2}4=\ln 2=b$,所以 $b<a<c$.

9. A 【解析】由对称性可知,该球体的球心与正方体的中心重合.旧石凳相对的面共有两类,一类是正方形,一类是等边三角形.若相对的面为正方形,则两个面之间的距离为40 cm;若相对的面为等边三角形,则两个面之间的距离为 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm.所以正方体的内切球即为旧石凳打磨后的最大球体,所以打磨后的球体半径的最大值为20 cm.

10. C 【解析】设双曲线 $T$ 的焦距为 $2c$,圆 $D$ 的半径为 $R$.由题意可知,$|OA|=c$,$|CO|=|BO|=a$,所以双曲线 $T$ 的离心率为 $\frac{c}{a}=2$,所以 $c=2a$.又 $c^2=a^2+b^2$,所以 $a=\sqrt{2}$,$c=2\sqrt{2}$,所以 $|AB|=3\sqrt{2}$.在△$ADB$ 中,$\angle ADB=120^\circ$,则 $|DA|=R=\frac{\frac{1}{2}|AB|}{\sin 60^\circ}=\sqrt{6}$.

11. D 【解析】由题意可得 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,则直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 不是其图象的对称轴,故A错误;因为图象整体向上平移了一个单位长度,所以对称中心也向上平移了一个单位长度,点 $\left(-\frac{\pi}{12},1\right)$ 是其对称中心,故B错误;任取方程 $f(x)=1$ 得到的两个根,它们彼此之间相差的应该是 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍,故C错误;当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,此时 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$,最大值为 $\sqrt{3}+1$,所以对于任意的 $x_1,x_2,x_3\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,$f(x_1)+f(x_2)\geqslant\sqrt{3}+2>\sqrt{3}+1\geqslant f(x_3)$ 恒成立,故D正确.

12. C 【解析】作出函数 $y=h(x)$ 的图象如图所示：



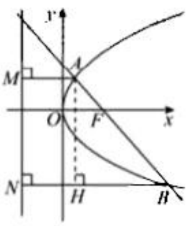

由图可知，当 $k=2$ 时，方程有且只有一个根；当 $4\leqslant k<11$ 时，方程有三个根；当 $k=7$ 时，方程有三个根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，其中 $x_1+x_2=-2$，$x_3=3$，所以所有根的和为 1；当方程有两个根时，$k=3$ 或 $k=12$.

## 二、填空题

13. 15 【解析】$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^6$ 的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r=C_6^r(-1)^r x^{6-3r}$，令 $6-3r=0$，得 $r=2$，所以常数项为 $T_3=C_6^2=15$.

14. 8 194 【解析】由题意知，$s=1\times2+2\times2^2+\cdots+9\times2^9$，由错位相减法得 $s=8\ 194$.

15. $\sqrt{2}$ 【解析】易知直线 $l$ 过点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，且倾斜角为 $135^\circ$，如图，设 $M,N$ 分别为 $A,B$ 在准线上的射影，作 $AH\perp BN$，垂足为 $H$，则 $\angle ABH=45^\circ$，$|BF|-|AF|=|BN|-|AM|=|BH|=1$，所以 $|AB|=\sqrt{2}$.




16. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 【解析】由 $f(x)=x(f'(x)-\ln x)$，得 $xf'(x)-f(x)=x\ln x(x>0)$，所以 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数，所以 $g(x)\geqslant g(1)=f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{1}{2}$. 因为 $f(x)\geqslant ax$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

## 三、解答题

17. **解**：(1)在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理，

得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos 75^\circ$，

即 $BD^2=4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-4\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=4$，

所以 $BD=2$.　　(4 分)

(2)解法 1：在 $\triangle BCD$ 中，

由正弦定理，得 $\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin 75^\circ}$，

所以 $\sin\angle CBD=\frac{CD\sin 75^\circ}{BD}=\frac{1}{2}$.　　(6 分)

因为 $0^\circ<\angle CBD<60^\circ$，

所以 $\angle CBD=30^\circ$，所以 $\angle ABD=30^\circ$.

又因为 $\angle BAD=\angle BCD$，所以 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，

所以 $AB=BC$，$\angle ABC=60^\circ$，

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.　　(10 分)

所以 $\alpha=60^\circ$，$\beta=15^\circ$，所以 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.　　(12 分)

解法 2：在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=150^\circ$，

由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\beta}$，

即 $AC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin\beta}$.　　(6 分)

同理，在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\alpha}$，即 $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sin\alpha}$.　　(8 分)

所以 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sin\alpha}$，

即 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.　　(12 分)

18. **解**：(1)由题意得列联表

| 生产线 | 产品为一等品 | 产品不是一等品 | 总计 |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 6 | 10 |
| B | 9 | 1 | 10 |
| 总计 | 13 | 7 | 20 |

(2 分)

所以 $K^2$ 的观测值 $k=\frac{20\times(4\times1-9\times6)^2}{10\times10\times13\times7}=\frac{500}{91}\approx5.495>3.841$，

所以有 95% 的把握认为生产线与所生产的产品为一等品有关.　　(5 分)

(2)从 A 生产线随机抽取的 10 只口罩中，过滤效率大于 0.970 的产品有 4 只；

从 $B$ 生产线随机抽取的10只口罩中，过滤效率大于0.970的产品有9只；

所以可以据此推断，$A$ 生产线生产的产品是一等品的概率为0.4，

$B$ 生产线生产的产品是一等品的概率为0.9. (7分)

随机变量 $X$ 的所有可能取值为0，1，2，

$P(X=0)=0.6\times0.1=0.06$，

$P(X=1)=0.4\times0.1+0.6\times0.9=0.58$，

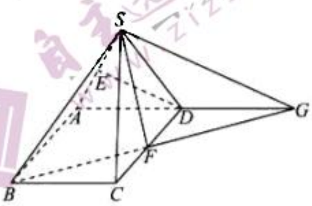
$P(X=2)=0.4\times0.9=0.36$， (10分)

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.06 | 0.58 | 0.36 |

$E(X)=0\times0.06+1\times0.58+2\times0.36=1.3$. (12分)

19. (1)**证明**：如图，连接 $BF$ 并延长交 $AD$ 的延长线于点 $G$，连接 $SG$.




因为底面 $ABCD$ 为菱形，$F$ 为 $CD$ 的中点，

所以 $AG=2AD$.

又 $E$ 为 $SA$ 的中点，所以 $DE\parallel SG$. (3分)

因为 $SG\subset$ 平面 $SBF$，$DE\not\subset$ 平面 $SBF$，

所以 $DE\parallel$ 平面 $SBF$. (4分)

(2)**解**：设 $AD$ 的中点为 $O$，连接 $SO$，$OF$，$OC$.

因为 $SA=SD=2=AD$，所以 $SO\perp AD$，$SO=\sqrt{3}$.

因为 $O$，$F$ 分别为 $AD$，$CD$ 的中点，所以 $OF=1$.

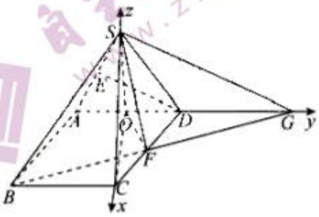
因为 $SF=2$，$SO=\sqrt{3}$，所以 $SO\perp OF$.

因为 $AD\cap OF=O$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$OF\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$， (6分)

所以 $SO$，$OC$，$AD$ 三条直线两两垂直.

以 $O$ 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OS}$ 的方向为 $x$，$y$，$z$ 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，




则 $S(0,0,\sqrt{3})$，$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},-2,0)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BS}=(-\sqrt{3},2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2},0\right)$.

设平面 $SAB$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BS}=-\sqrt{3}x_1+2y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x_1-y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=-1$，

所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$. (8分)

设平面 $SBF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-\sqrt{3}x_2+2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{5}{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $y_2=\frac{\sqrt{3}}{5}$，$z_2=\frac{3}{5}$，

所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{3}{5}\right)$. (10分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{185}}{37}$，

所以二面角 $A$-$SB$-$F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{185}}{37}$. (12分)

20. (1)**解**：设椭圆的半焦距为 $c$，

因为 $S_{\triangle BF_1F_2}=\frac{1}{2}a^2=1$，所以 $a=\sqrt{2}$. (2分)

又 $b=c$，且 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=c=1$，

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. (4分)

(2)**证明**：由(1)知 $A(0,1)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$l_1:y=k_1x+1$，$l_2:y=k_2x+1$.

联立 $\begin{cases}y=k_1x+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k_1^2)x^2+4k_1x=0$，

所以 $x_1=\frac{-4k_1}{1+2k_1^2}$，$y_1=\frac{1-2k_1^2}{1+2k_1^2}$. (6分)

因为 $l_1$ 与 $l_2$ 关于直线 $y=x+1$ 对称，

设点 $F_1$ 到直线 $l_1$ 的距离为 $d_1$，到直线 $l_2$ 的距离为 $d_2$，所以 $d_1=d_2$，得 $k_1k_2=1$. (8分)

同理 $x_2=\frac{-4k_1}{k_1^2+2}$，$y_2=\frac{k_1^2-2}{k_1^2+2}$，

所以 $k_{MN}=\frac{\frac{k_1^2-2}{k_1^2+2}-\frac{1-2k_1^2}{1+2k_1^2}}{\frac{-4k_1}{k_1^2+2}-\frac{-4k_1}{1+2k_1^2}}=\frac{k_1^2+1}{-k_1}$， (10分)

所以直线 $MN$ 的方程为 $y-\frac{1-2k_1^2}{1+2k_1^2}=-\frac{1+k_1^2}{k_1}\left(x+\frac{4k_1}{1+2k_1^2}\right)=-\frac{1+k_1^2}{k_1}x-\frac{4(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$，

所以 $y=-\frac{1+k_1^2}{k_1}x-3$。

所以直线 $MN$ 恒过定点 $(0,-3)$。（12 分）

21. (1)**证明**：当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^{-x}-x+\ln x(x>0)$，

则 $f'(x)=-e^{-x}-1+\frac{1}{x}=\frac{e^x-x-xe^x}{xe^x}$。（1 分）

令 $g(x)=e^x-x-xe^x(x>0)$，（2 分）

则 $g'(x)=e^x-1-(x+1)e^x=-xe^x-1<0$。（3 分）

又 $g(0)=1>0$，$g(1)=-1<0$，

所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$。（4 分）

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

所以 $f(x_0)>f(1)=\frac{1}{e}-1$。

所以 $f(x)>\frac{1}{e}-1$ 有解。（6 分）

(2)**解**：对任意 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant x^a$ 恒成立，即 $e^{-x}-x-a\ln x\leqslant x^a$ 恒成立。

即 $e^{-x}+(-x)\leqslant a\ln x+x^a=e^{a\ln x}+a\ln x$ 恒成立。（8 分）

令 $h(x)=e^x+x$，上式即为 $h(-x)\leqslant h(a\ln x)$。

因为 $h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数。

所以 $-x\leqslant a\ln x$。

所以 $a\geqslant-\frac{x}{\ln x}$。（10 分）

易知函数 $y=\frac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递增。（11 分）

所以 $y=\frac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的最小值为 $e$。

所以 $a\geqslant-e$，即实数 $a$ 的取值范围是 $[-e,+\infty)$。（12 分）

22. **解**：(1)由题意知，曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta-2\sin\theta=0$，

即 $\rho^2\cos^2\theta-2\rho\sin\theta=0$。

所以曲线 $C_2$ 的直角坐标方程为 $y=\frac{1}{2}x^2$。（5 分）

(2)曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,\\ y=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.\end{cases}$

所以曲线 $C_1$ 的直角坐标方程为 $y=\frac{x}{1+x^2}$。（7 分）

由 $\begin{cases}y=\frac{x}{1+x^2},\\ y=\frac{1}{2}x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$（9 分）

所以曲线 $C_1$，$C_2$ 公共点的直角坐标为 $(0,0)$，$\left(1,\frac{1}{2}\right)$。（10 分）

23. **解**：(1)由题意得，$f(x)=\begin{cases}4-2x, x<1,\\ 2, 1\leqslant x\leqslant3,\\ 2x-4, x>3.\end{cases}$（2 分）

当 $x<1$ 时，$4-2x>6$，解得 $x<-1$；

当 $1\leqslant x\leqslant3$ 时，$2>6$，无解；

当 $x>3$ 时，$2x-4>6$，解得 $x>5$。

所以不等式 $f(x)>6$ 的解集为 $\{x|x<-1$，或 $x>5\}$。（5 分）

(2)设点 $P(a,b)$，因为 $3a+4b=12$，

所以点 $P$ 在直线 $3x+4y=12$ 上。

设 $M(-1,0)$，则 $|PM|^2=(a+1)^2+b^2\geqslant\left(\frac{|-3-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)^2=9$。（7 分）

又 $f(x)\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$，（9 分）

所以 $11-f(x)\leqslant9$。

所以 $(a+1)^2+b^2\geqslant11-f(x)$。

**关于我们**

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。


关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》