

# 2024届10月质量监测考试

## 理科数学

试卷满分：150分 考试时间：120分钟

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 全部答案在答题卡上完成，答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $z = (1 + 2i)(3 + ai)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 是纯虚数，则  $a =$   
A.  $-\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $-3$                       D.  $3$
2. 向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (2 + m, 3 - m)$ ,  $\vec{c} = (3m, 1)$ ,  $\vec{a} \parallel (\vec{c} - \vec{b})$ , 则  $m =$   
A.  $2$                       B.  $-2$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $-\frac{2}{3}$
3. 全集  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $M = \{1, 2, 3\}$ ,  $N = \{3, 4, 5\}$ , 则  $(\complement_I N) \cap M =$   
A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{4, 5\}$                       C.  $\{3\}$                       D.  $\{1, 2, 4, 5\}$
4. 已知  $a = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ,  $b = 3^5$ ,  $c = \log_3 \frac{1}{5}$ , 则  $a, b, c$  大小关系是  
A.  $a < b < c$                       B.  $a < c < b$                       C.  $c < a < b$                       D.  $c < b < a$
5. 等边三角形  $ABC$  边长为  $2$ ,  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ , 则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$   
A.  $1$                       B.  $-1$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $-\frac{2}{3}$
6. 已知  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta$  终边上有点  $(\sin 2, \cos 2)$ , 则  $\theta =$   
A.  $2 - \frac{\pi}{2}$                       B.  $\frac{\pi}{2} + 2$                       C.  $\frac{3\pi}{2} - 2$                       D.  $\frac{5\pi}{2} - 2$
7. 函数  $f(x) = x - a \ln x$  在区间  $(1, 6)$  的图象上存在两条相互垂直的切线, 则  $a$  的取值范围  
A.  $(1, 6)$                       B.  $(1, 3)$                       C.  $(3, 4)$                       D.  $(4, 6)$
8.  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos(x + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ , 则  $\sin x + \sqrt{3} \cos x =$   
A.  $-\frac{2}{25}$                       B.  $\frac{2}{25}$                       C.  $-\frac{8}{5}$                       D.  $\frac{8}{5}$
9. 已知  $a > b > \frac{1}{a} > 0$ , 则以下不正确的是  
A.  $a + b > 2$                       B.  $a > 1$                       C.  $b > 1$                       D.  $a - \frac{1}{b} > b - \frac{1}{a}$
10. 条件  $p: f(x) = \log_{(a-1)} x$  是  $(0, +\infty)$  上的增函数; 条件  $q: \frac{a-3}{2-a} > 0$ ; 则正确的是

A. p是q的必要不充分条件

B. p是q的充分不必要条件

C. p是q的充要条件

D. p是q的既不充分也不必要条件

11. 已知  $b < 0$ ,  $f(x) = x^2 + (b-2)x + b$ ,  $y = f(x) - x$  的两个零点是  $x_1, x_2$ , 则以下结论:

(1)  $f(x)$  有两个零点; (2)  $\exists a \in \mathbf{R}$ , 对  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) > ax$ ; (3)  $x_1 + x_2 > 3$ ; (4)  $x_1, x_2$  也是  $f(f(x)) - x$  的零点.

其中正确的个数是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

12. 已知  $(x, y)$  满足:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$ , 则  $(x-2)^2 + (y-2)^2$  最小值为

A.  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

B.  $\frac{16}{5}$

C.  $\frac{2}{15}$

D.  $\frac{4}{5}$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 不等式  $\log_2 x + \log_4 x < 3$  的解集\_\_\_\_\_.

14. 已知  $a > 1, b > 1$ , 当  $b$  变化时,  $\log_a b + \log_b (a^2 + 12)$  最小值为4, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

15. 函数  $f(x), g(x)$  定义域都为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x)$  为奇函数, 且满足  $g(x) = f(x + \frac{1}{6})$ ,  $g(\sqrt{x} + \frac{1}{3}) =$

$f(\frac{1}{2} - x)$ , 在区间  $(0, \frac{1}{2})$  上,  $f(x) = 2^x - 1$ , 则  $f(\log_2 5) + g(\frac{5}{6}) =$ \_\_\_\_\_.

16. 考察函数  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} (x > 1)$ , 有  $f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} < 0$ ,

故  $f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减, 故对  $m > n > 1$  有  $\frac{\ln(m+1)}{\ln m} < \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \Rightarrow \frac{\ln(m+1)}{\ln(n+1)} <$

$\frac{\ln m}{\ln n} \Rightarrow \log_{n+1}(m+1) < \log_n m$ , 由上结论比较  $\log_2 5, \log_{17} 626, \frac{5}{2}$  从小到大依次是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)  $f(x) = 2 \sin x \cos(x + \frac{\pi}{3})$ .

(1) 求  $f(x)$  周期及最大值;

(2) 求  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  上所有零点的和.

18. (12分) 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{2} - (a+1)x + a \ln x$ .

(1) 已知  $a = -\frac{1}{2}$ , 求  $f(x)$  最小值;

(2) 讨论函数  $f(x)$  单调性.

19. (12分)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c, c > b, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20, \triangle ABC$  的面积为  $10\sqrt{3}$ .

(1) 求  $\angle A$ ;

(2) 设  $O$  点为  $\triangle ABC$  外心, 且满足  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{49}{6}$ , 求  $a$ .

20. (12分)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c, AD$  为  $\angle BAC$  平分线,  $c : AD : b = \sqrt{3} : 2 : 2\sqrt{3}$ .

(1) 求  $\angle A$ ;

(2)  $AD$  上有点  $M, \angle BMC = 90^\circ$ , 求  $\tan \angle ABM$ .

21. (12分) 已知函数  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  ( $4a > b > 0$ ) 过点  $(2, \frac{5}{2})$ , 且在  $(0, +\infty)$  上最小值为  $\sqrt{6}$ .

(1) 求  $a, b$ ;

(2)  $x > 0$  时, 求  $f(x)$  上的点到  $Q(2, 4)$  距离最小值.

22. (12分) 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} + x - 2\ln x + m$  有两个零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ).

(1) 求  $m$  的范围;

(2) 证明:  $x_1 + x_2 > 4$ .