2021—2022 学年度第一学期教学质量检查

高三数学

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑．

A 1. 设集合 $A=\{x\,|\,0\le x\le 4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-3\le 0\}$，则 $A\cap B=$ $-1\le x\le 3$

A. $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$　B. $\{x\,|\,-1\le x\le 4\}$　C. $\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$　D. $\{x\,|\,0\le x\le 1\}$

B 2. $(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4$ 的展开式中 x^2 项的系数是

A. 9　B. 10　C. 11　D. 12

3. 已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=e^x+e^{-x}$，则下列结论正确的是

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数　B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数　D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

B 4. 若 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\tan\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$，则 $\tan\alpha=$

$\sin\alpha=\cos\alpha$　$2\sin\alpha\cos\alpha=1$

A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. $2-\sqrt{3}$　D. $\sqrt{3}$

B 5. 甲乙两人在数独 APP 上进行"对战赛"，每局两人同时解一道题，先解出题的人赢得一局，假设无平局，且每局甲乙两人赢的概率相同，先赢 3 局者获胜，则甲获胜且比赛恰进行了 4 局的概率是

$P=A_3^3\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

A. $\frac{3}{10}$　B. $\frac{3}{8}$　C. $\frac{1}{16}$　D. $\frac{3}{16}$

6. "中国天眼"（如图 1）是世界最大单口径、最灵敏的射电望远镜，其形状可近似地看成一个球冠（球冠是球面被平面所截的一部分，如图 2 所示，截得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的直径被截得的线段叫做球冠的高．若球面的半径是 R，球冠的高度是 h，则球冠的面积 $S=2\pi Rh$）．已知天眼的球冠的底的半径约为 250 米，天眼的反射面总面积（球冠面积）约为 25 万平方米，则天眼的球冠高度约为

（参考数值 $\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\approx 0.52$）

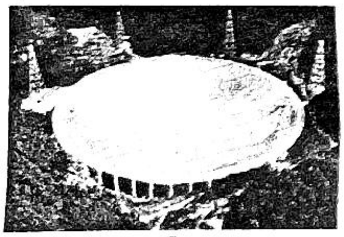


图 1

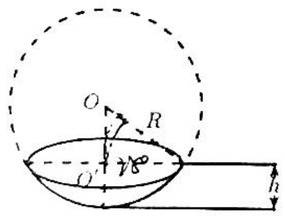


图 2

A. 52 米　B. 104 米　C. 130 米　D. 156 米

7. 已知直线 l 过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与该抛物线交于 M,N 两点.若线段 MN 的长为 16，MN 的中点到 y 轴距离为 6，则 ΔMON（O 为坐标原点）的面积是

A. $8\sqrt{3}$　B. $8\sqrt{2}$　C. $6\sqrt{2}$　D. 6

8. 已知 O 为坐标原点，点 P 为函数 $y=\cos x$ 图象上一动点，当点 P 的横坐标分别为 $\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}$ 时，对应的点分别为 P_1,P_2,P_3，则下列选项正确的是

A. $|OP_1|>|OP_2|>|OP_3|$　B. $|OP_1|>|OP_3|>|OP_2|$　C. $|OP_2|>|OP_3|>|OP_1|$　D. $|OP_3|>|OP_2|>|OP_1|$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑．

9. 已知复数 z_1,z_2,z_3，$\overline{z_1}$ 是 z_1 的共轭复数，则下列结论正确的是 AB

A. 若 $z_1+z_2=0$，则 $|z_1|=|z_2|$

B. 若 $z_2=\overline{z_1}$，则 $|z_1|=|z_2|$

C. 若 $z_3=z_1z_2$，则 $|z_3|=|z_1||z_2|$

D. 若 $|z_1+1|=|z_2+1|$，则 $|z_1|=|z_2|$

10. 已知函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$，若 $f(0)=\sqrt{3}$ 且对任意 $x\in R$ 都有 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是

$b=\sqrt{3}$.　　C.

A. $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，图象关于原点对称

D. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位后，图象关于 y 轴对称

$\geq 22°C.$

11. 气象意义上从春季进入夏季的标志为“当且仅当连续 5 天每天日平均温度不低于 22°C”．现有甲、乙、丙三地连续 5 天日平均温度的记录数据（数据均为正整数，单位°C）且满足以下条件：

甲地：5 个数据的中位数是 24，众数是 22；

乙地：5 个数据的中位数是 27，平均数是 24；

丙地：5 个数据有 1 个是 30，平均数是 24，方差是 9.6；

B.D.

根据以上数据，下列统计结论正确的是

A. 甲地进入了夏季

B. 乙地进入了夏季

C. 不能确定丙地进入了夏季

D. 恰有 2 地确定进入了夏季

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}9x^2-12x+4 & x\le 1\\ \frac{1}{4}f(x-1) & x>1\end{cases}$，则下列结论正确的是　A.

A. $f(n)=4^{1-n},n\in N^*$

B. $\exists x\in(0,+\infty),f(x)>\frac{1}{x}$ 恒成立

C. 关于 x 的方程 $f(x)=4^{1-n}(n\in N^*)$ 的所有根之和为 $n^2+\frac{n}{3}$

D. 关于 x 的方程 $f(x)=4^{1-n}(n\in N^*)$ 的所有根之积小于 $(n!)^2$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填在答题卡的相应位置上．

13. 已知 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个焦点，则点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距

a^2　b^2　　$c=5$.　d_2　　$y=\pm\frac{4}{3}x$.

4.

14. 已知一个圆锥的底面半径为 3，其侧面积为 15π，则该圆锥的体积为 12π.

15. 桌面上有一张边长为 2 的正三角形的卡纸，设三个顶点分别为 A，B，C，将卡纸

顺时针旋转 $\frac{5\pi}{6}$，得到 A、B 的旋转点分别为 A_1、B_1，则 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=$ $2\sqrt{3}$.

$\times\cos 60°$

16. 龙曲线是由一条单位线段开始，按下面的规则画成的图形：将前一代的每一条折线段都作为这一代的等腰直角三角形的斜边，依次画出所有直角三角形的两段，使得所画的相邻两线段永远垂直（即所画的直角三角形在前一代曲线的左右两边交替出现）．例如第一代龙曲线（图3）是以 A_1A_2 为斜边画出等腰直角三角形的直角边 A_1A_3，A_3A_2 所得的折线图，图4、图5依次为第二代、第三代龙曲线（虚线即为前一代龙曲线）．A_1，A_2，A_3 为第一代龙曲线的顶点，设第 n 代龙曲线的顶点数为 a_n，由图可知 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=9$，则 $a_4=$ 15；数列 $\left\{\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=$________.

3n-1

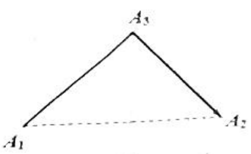


图3

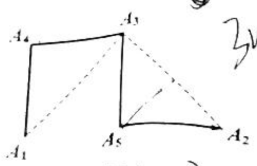


图4

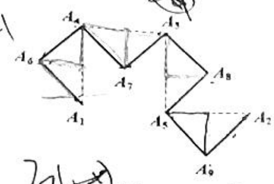


图5

四、解答题：本大题共6小题，第17题10分，18、19、20、21、22题各12分，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．必须把解答过程写在答题卡相应题号指定的区域内，超出指定区域的答案无效．

17. （本小题满分10分）

ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a^2=b\cos C+c\cos B$．

（1）求 a；

（2）若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求 ΔABC 的周长．

$\sin^2 A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

$=\sin(B+C)$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$a^2-a=0$

$a(a-1)=0$

$a=1$

18. （本小题满分12分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_5=17$，$S_4=2a_2+22$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）在任意相邻两项 a_k 和 a_{k+1} $(k=1,2,3,\ldots)$ 之间插入 2^k 个1，使它们和原数列的项构成一个新的数列 $\{b_n\}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前200项的和 T_{200}．

19. （本小题满分12分）

如图6，在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，点 O，E 分别是 BD,BC 中点，点 F 是 SE 上的一点．

（1）证明：$OF\perp BC$；

（2）若四棱锥 $S-ABCD$ 的所有棱长为 $2\sqrt{2}$，求直线 OF 与平面 SDE 所成角的正弦值的最大值．

$OE\perp BC$

$OF\perp$

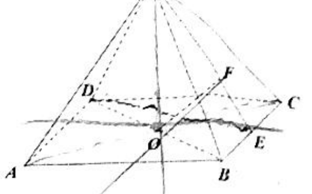


图6

高三数学　第3页（共4页）

20.（本小题满分 12 分）

已知某次比赛的乒乓球团体赛采用五场三胜制，第一场为双打，后面的四场为单打.团体赛在比赛之前抽签确定主客队. 主队三名选手的一单、二单、三单分别为选手 A、B、C，客队三名选手的一单、二单、三单分别为选手 X、Y、Z. 比赛规则如下：第一场为双打（YZ 对阵 BC）、第二场为单打（X 对阵 A）、第三场为单打（Z 对阵 C）、第四场为单打（Y 对阵 A）、第五场为单打（X 对阵 B）. 已知双打比赛中 YZ 获胜的概率是 $\frac{1}{4}$，单打比赛中 X、Y、Z 分别对阵 A、B、C 时，X、Y、Z 获胜的概率如下表：

选手 \ 选手	A	B	C
X	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{8}$

$\frac{2}{24}+\frac{3}{24}$

（1）求主、客队分出胜负时恰进行了 3 场比赛的概率；

（2）客队输掉双打比赛后，能否通过临时调整选手 Y 为三单、选手 Z 为二单使得客队团体赛获胜的概率增大？请说明理由.

$\frac{1}{2}$

21.（本小题满分 12 分）

已知点 A 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点，点 $F(1,0)$ 为右焦点，直线 $l:x=4$ 与 x 轴的交点为 N，且 $|AF|=|FN|$，点 M 为椭圆上异于点 A 的任意一点，直线 AM 交 l 于点 P.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）证明：$\angle MFN=2\angle PFN$.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\log_a x+\frac{1}{2}ax^2$.

（1）若 $a=e$，求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

2021—2022 学年度第一学期教学质量检查

高三数学 参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	B	D	C	B	D

二、多项选择题（全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ABC	BD	AC	ACD

三、填空题（16 题第一空 2 分，第二空 3 分）

13. 4　　14. 12π　　15. $4+2\sqrt{3}$　　16. 17；$\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$

四、解答题

17. 解：（1）**方法一：** 因为 $a^2=b\cos C+c\cos B$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $a\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，…………2 分

即 $a\sin A=\sin(B+C)$，…………3 分

由 $B+C=\pi-A$，得 $a\sin A=\sin(B+C)=\sin A$，…………4 分

因为 $\sin A>0$，所以 $a=1$.…………5 分

方法二：因为 $a^2=b\cos C+c\cos B$，由余弦定理得 $a^2=b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，……2 分

化简得 $2a^3=a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2$，即 $a^3=a^2$，…………4 分

因为 $a\neq 0$，则 $a=1$.…………5 分

（2）由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}, A=\frac{\pi}{3}$，得 $\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，…………6 分

解得 $bc=1$，…………7 分

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2=b^2+c^2-bc$，即 $b^2+c^2=2$，…………8 分

由 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=4$，得 $b+c=2$，…………9 分

故 $a+b+c=3$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 3.…………10 分

18. 解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由题得 $\begin{cases}a_5=17\\ S_4=2a_2+22\end{cases}$，即 $\begin{cases}a_1+4d=17\\ 4a_1+\frac{4\times5}{2}d=2(a_1+d)+22\end{cases}$，…………2 分

整理得 $\begin{cases}a_1+4d=17\\ a_1+2d=11\end{cases}$，…………3 分

解得 $\begin{cases}a_1=5\\ d=3\end{cases}$，…………4 分

所以 $a_n=3n+2$.…………5 分

（2）**方法一**：由题意可知，$\{b_n\}$ 的各项为 $a_1,1,1,a_2,1,1,1,1,a_3,1,1,1,1,1,1,1,1,\cdots a_k,\underbrace{1,1,1\cdots}_{2^k},a_{k+1},\cdots$

即 $5,1,1,8,1,1,1,1,11,1,1,1,1,1,1,1,1,\cdots 3k+2,\underbrace{1,1,1\cdots}_{2^k},3k+5,\cdots$，……………………6 分

因为 $2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+7=133<200$，

且 $2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+7=261>200$，……………………8 分

所以 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 会出现在数列 $\{b_n\}$ 的前 200 项中，

所以 a_7 前面（包括 a_7）共有 126+7=133 项，所以 a_7 后面（不包括 a_7）还有 67 个 1，……10 分

所以 $T_{200}=(5+8+11+14+17+20+23)+(2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)+67=291$ ……………………12 分

方法二：在数列 $\{b_n\}$ 中，a_k 前面（包括 a_k 共有 $2+2^2+2^3+2^4+\cdots 2^{k-1}+k=2^k+k-2$ 项，

……………………6 分

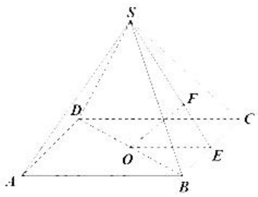
令 $2^k+k-2\le 200$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $k\le 7$，……………………8 分

所以 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 会出现在数列 $\{b_n\}$ 的前 200 项中，

所以 a_7 前面（包括 a_7）共有 126+7=133 项，所以 a_7 后面（不包括 a_7）还有 67 个 1，……10 分

所以 $T_{200}=(5+8+11+14+17+20+23)+(2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)+67=291$ ……………………12 分

19.解：（1）如图，连接 SO 和 OE，



因为 $S-ABCD$ 是正四棱锥，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp BC$ ①……………………1 分

因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $DC\perp BC$，

又因为点 O，E 分别是 BD、BC 中点，所以 $OE/\!/DC$，

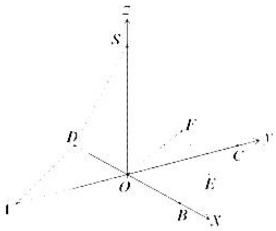
所以 $OE\perp BC$ ②……………………3 分

又因为 $OE\cap SO=O$，OE、$SO\subset$ 平面 SOE，

所以 $BC\perp$ 平面 SOE，……………………4 分

因为 $OF\subset$ 平面 SOE，所以 $OF\perp BC$，……………………5 分

（2）易知 OB,OC,OS 两两相互垂直，如图，以点 O 为原点，OB，OC，OS 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



因为四棱锥 $S-ABCD$ 的所有棱长为 $2\sqrt{2}$，所以 $BD=4$，$SO=2$，

所以 $O(0,0,0)$，$S(0,0,2)$，$D(-2,0,0)$，$E(1,1,0)$，……………………6 分

设 $\overrightarrow{SF}=\lambda\overrightarrow{SE}(0<\lambda<1)$，得 $F(\lambda,\lambda,2-2\lambda)$，则

$\overrightarrow{SD}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{DE}=(3,1,0)$，$\overrightarrow{OF}=(\lambda,\lambda,2-2\lambda)$……………………7 分

设平面 SDE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SD}=-2x-2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=3x+y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}z=-x\\ y=-3x\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-3,-1)$，……………………………9 分

设直线 OF 与平面 SDE 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{OF}>\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{OF}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OF}\right|}=\dfrac{\left|\lambda-3\lambda-2+2\lambda\right|}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+(2-2\lambda)^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6\lambda^2-8\lambda+4}}(0<\lambda<1)$，……………………………………………………………………11 分

当 $\lambda=-\dfrac{-8}{2\times6}=\dfrac{2}{3}$ 时，$6\lambda^2-8\lambda+4$ 取得最小值 $\dfrac{4}{3}$，此时 $\sin\theta$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.……………12 分

20. 解：（1）设"主、客队分出胜负时恰进行了 3 场比赛"事件为事件 A，则事件 A 包含"主队 3 场全胜"和"客队 3 场全胜"两类事件，…………………………………………………………1 分

"主队 3 场全胜"的概率为 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$，…………………………………………2 分

"客队 3 场全胜"的概率为 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$，……………………………………………………3 分

所以 $P(A)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{24}$，

所以主、客队分出胜负时恰进行了 3 场比赛的概率为 $\dfrac{5}{24}$.……………………………………4 分

（2）能，理由如下：

设"剩余四场比赛未调整 Y、Z 出场顺序，客队获胜"为事件 M，第二场单打（X 对阵 A）、第三场单打（Z 对阵 C）、第四场单打（Y 对阵 A）、第五场单打（X 对阵 B）的胜负情况分别为：胜胜胜、胜负胜胜、胜胜负胜、负胜胜胜；…………………………………………………5 分

则 $P(M)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{36}$，………………7 分

设"剩余四场比赛调整 Y、Z 出场顺序，客队获胜"为事件 N，第二场单打（X 对阵 A）、第三场单打（Y 对阵 C）、第四场单打（Z 对阵 A）、第五场单打（X 对阵 B）的胜负情况分别为：胜胜胜、胜负胜胜、胜胜负胜、负胜胜胜；…………………………………………………8 分

则 $P(N)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$，………………10 分

因为 $P(M)<P(N)$，……………………………………………………………………………11 分

所以客队调整选手 Y 为三单、选手 Z 为二单获胜的概率更大.………………………………12 分

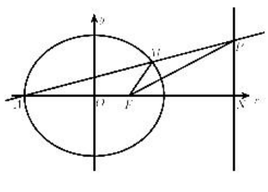
21.解：（1）由题知 $|AF|=|FN|$，得 $a+c=4-c$，……………………………………………1 分

又因为右焦点为 $F(1,0)$，则 $c=1$，

解得 $a=2$，……………………………………………………………………………………2 分

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$，……………………………………………………………………3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.……………………………………………………………4 分



（2）设点 M 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $k_{AM}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$，

所以直线 AM 的方程是 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x-2)$，…………………………………………………………5 分

当 $x=4$ 时，$y=\dfrac{6y_0}{x_0+2}$，

所以点 P 的坐标为 $(4,\dfrac{6y_0}{x_0+2})$，……………………………………………………………………6 分

所以 $\tan\angle PFN=k_{PF}=\dfrac{\frac{6y_0}{x_0+2}-0}{4-1}=\dfrac{2y_0}{x_0+2}$，$\tan\angle MFN=k_{MF}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，…………………………7 分

所以 $\tan 2\angle PFN=\dfrac{2\tan\angle PFN}{1-\tan^2\angle PFN}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2y_0}{x_0+2}}{1-(\dfrac{2y_0}{x_0+2})^2}=\dfrac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2-4y_0^2}$.……………………………8 分

因为点 M (x_0,y_0) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $4y_0^2=12-3x_0^2$，……………9 分

所以 $\tan 2\angle PFN=\dfrac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2-4y_0^2}=\dfrac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2-(12-3x_0^2)}$

$=\dfrac{4(x_0+2)y_0}{4x_0^2+4x_0-8}=\dfrac{(x_0+2)y_0}{(x_0-1)(x_0+2)}=\dfrac{y_0}{x_0-1}=\tan\angle MFN$，……………………………………11 分

又因为 $\angle PFN$ 和 $\angle MFN$ 是锐角，

所以 $\angle MFN=2\angle PFN$.…………………………………………………………………………12 分

22.解：（1）当 $a=e$，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}ex^2$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+ex$，……………………………………1 分

故 $f'(1)=\dfrac{1}{1}+e=1+e$，……………………………………………………………………………2 分

$x=1$ 时，$f(1)=\ln1+\dfrac{1}{2}e=\dfrac{1}{2}e$，故切点为 $(1,\dfrac{1}{2}e)$，……………………………………………3 分

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}e=(1+e)(x-1)$，即 $y=(1+e)x-\dfrac{1}{2}e-1$.………………4 分

（2）函数 $f(x)$ 有两个零点

$\Leftrightarrow$ 方程 $\log_a x+\dfrac{1}{2}ax^2=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上有两个根

$\Leftrightarrow$ 方程 $\dfrac{\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}a\ln a$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上有两个根

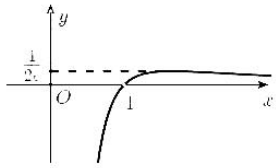
$\Leftrightarrow$ 函数 $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 与 $y=-\dfrac{1}{2}a\ln a$ 的图象在 $x\in(0,+\infty)$ 上有两个交点……………………………5 分

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，

$g'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}>0$ 时，$0<x<\sqrt{e}$；$g'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}<0$ 时，$x>\sqrt{e}$.

所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，……………………………6 分

由 $g(1)=0, g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，作图如下：



……………………………………………………………………………………………… 7 分

由图得 $0<-\frac{1}{2}a\ln a<\frac{1}{2e}$，即 $-\frac{1}{e}<a\ln a<0$，…………………………………… 8 分

设 $h(x)=x\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1+\ln x$，……………………………………………… 9 分

$h'(x)=1+\ln x>0$ 时，$x>\frac{1}{e}$；$h'(x)=1+\ln x<0$ 时，$0<x<\frac{1}{e}$；

所以 $h(x)=x\ln x$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，…………………… 10 分

因为 $0<x<1$ 时 $\ln x<0$，且 $h(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$-\frac{1}{e}\le h(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，………………………… 11 分

又因为 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，所以 $-\frac{1}{e}<x\ln x<0$ 的解集为 $(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},1)$

综上所述 $a\in(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},1)$ ………………………………………………………… 12 分