咸阳市 2023 年高考模拟检测(一)

数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C　2. A　3. D　4. C　5. B　6. A　7. C　8. B　9. C　10. B　11. D　12. B

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 8　14. 3　15. $\frac{\pi}{6}$　16. 6

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$;

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}=2^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}}=2^{n-1}$.

综上,$a_n=2^{n-1}$. ………………………………………………………………(6 分)

(2)若选①$b_2^2=b_4$,又 $b_1=1$,设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d,则$(1+d)^2=1+3d(d\neq0)$,得 $d=1$.

$\therefore b_n=n, a_n\cdot b_n=n\cdot2^{n-1}$.

$\therefore T_n=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}$,

$2T_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$,

两式相减得$-T_n=1+2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot2^n$,

$\therefore T_n=(n-1)2^n+1$. ………………………………………………………………(12 分)

若选②$b_3+b_5=8$,可知 $b_4=4$,因此 $b_n=n$,以下同选择①. ……………………………………(12 分)

18. 解:(1)补充完整的 2×2 列联表如下:

	锻炼达标生	锻炼不达标	合计
男	60	120	180
女	40	180	220
合计	100	300	400

………………………………………………………………………………(3 分)

$\because K^2=\frac{400\times(60\times180-40\times120)^2}{180\times220\times100\times300}=\frac{400}{33}\approx12.12>10.828$,

$\therefore$ 有 99.9% 以上的把握认为“锻炼达标生”与性别有关. ……………………………………(6 分)

(2)“锻炼达标生”中男女人数之比为 60∶40=3∶2,抽取的男生有 6,女生有 4 人,

易知 $X=0,1,2$,$P(X=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$,$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$,

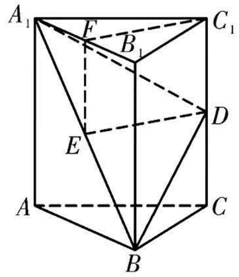
$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

……………………………………………………(10 分)

$\therefore EX=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$. ……………………………………………(12 分)

19. 解：(1)证明：如图，分别取 A_1B，A_1B_1 的中点 E，F，连接 DE，EF，FC_1，



易知 $FE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B_1B$，$C_1D \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B_1B$，∴ C_1DEF 是平行四边形，∴ $C_1F/\!/DE$.

由 $A_1C_1=B_1C_1$，F 是 A_1B_1 的中点，知 $C_1F\perp A_1B_1$，

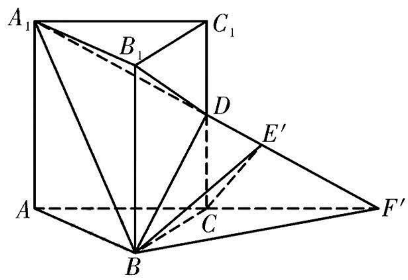
而平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，且平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B_1$，$C_1F\subsetneqq$ 平面 $A_1B_1C_1$，

∴ $C_1F\perp$ 平面 ABB_1A_1.

又 $C_1F/\!/DE$，∴ $DE\perp$ 平面 ABB_1A_1，

而 $DE\subsetneqq$ 平面 A_1BD，∴ 平面 $A_1BD\perp$ 平面 ABB_1A_1. ………………………………………… (6 分)

(2)方法 1：不妨设 $AC=BC=AA_1=2$，$C_1D=m$，注意到 $AB/\!/A_1B_1$，知 $\angle B_1A_1D$ 或其补角为异面直线 AB 和 A_1D 所成角，



在 $\triangle A_1B_1D$ 中，$A_1B_1=2\sqrt{2}$，$A_1D=\sqrt{4+m^2}$，

易知 $\frac{\sqrt{10}}{5}=\cos\angle B_1A_1D=\frac{(\sqrt{4+m^2})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{4+m^2})^2}{2\times\sqrt{4+m^2}\times 2\sqrt{2}}$，解得

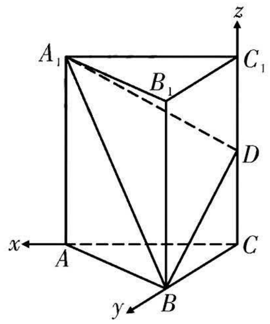
$m=1$，即 D 为 CC_1 的中点，

如图，延长 A_1D 交 AC 的延长线于 F'，连接 BF'，过 C 作 $CE'\perp DF'$ 于 E'，连接 BE'，易证 $\angle BE'C$ 为二面角 $B-A_1D-A$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE'$ 中，$BC=2$，$CE'=\frac{2}{\sqrt{5}}$，得 $\tan\angle BE'C=\frac{BC}{CE'}=\sqrt{5}$，∴ $\cos\angle BE'C=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

即二面角 $B-A_1D-A$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………… (12 分)

方法 2：取 C 为原点，直线 CA，CB，CC_1 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，



不妨设 $AC=BC=AA_1=2$，$CD=m$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$D(0,0,m)$，

∴ $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,m-2)$.

∴ $\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1D}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}=\frac{(-2,2,0)\cdot(-2,0,m-2)}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(m-2)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，解得 $m=1$.

显然平面 A_1AD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$，

易知 $\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-1)$，设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-2,2,-2)=0,\\ (x,y,z)\cdot(-2,0,-1)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-z=0,\\ 2x+z=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,-2)$，则 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(0,1,0)\cdot(1,-1,-2)}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

∴ 二面角 $B-A_1D-A$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………… (12 分)

20. 解：(1)依题意有 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=4,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=1$.

∴ 椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… (6 分)

(2)依题意可设直线 $l:x=ty+m$,则由直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}=1$,即 $m^2=1+t^2$.

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 x 得 $(ty+m)^2+4y^2=4$,即 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$,

$\Delta=(2tm)^2-4(t^2+4)(m^2-4)=16(t^2+4-m^2)=3>0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$,$y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+t^2}\frac{\sqrt{16(t^2+4-m^2)}}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{3}}{t^2+4}\sqrt{1+t^2}$.

令 $\sqrt{1+t^2}=n\geqslant1$,则 $t^2=n^2-1$,代入上式得:

$|AB|=4\sqrt{3}\frac{n}{n^2+3}=4\sqrt{3}\frac{1}{n+\frac{3}{n}}\leqslant2$,当且仅当 $n=\sqrt{3}$ 时等号成立,此时 $t=\pm\sqrt{2}$,$m=\pm\sqrt{3}$.

故 $|AB|$ 的最大值为 2. ……………………………………………………………… (12 分)

21. 解:(1) $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}{e^x}$,

令 $f'(x)>0$,则 $\cos(x+\frac{\pi}{4})>0$,即 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $f(x)$ 的递增区间为 $(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4})(k\in\mathbf{Z})$; ……………………………… (3 分)

令 $f'(x)<0$,则 $\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$,即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $f(x)$ 的递减区间为 $(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4})(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… (6 分)

(2)证明:$f(x)\geqslant kx,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,即 $\frac{\sin x}{e^x}\geqslant kx,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

当 $x=0$ 时,$k\in\mathbf{R}$; 来源:高三答案公众号

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时,$k\leqslant\frac{\sin x}{xe^x}$,

令 $g(x)=\frac{\sin x}{xe^x},x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,则 $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x-x\sin x}{x^2e^x}$.

令 $h(x)=x\cos x-\sin x-x\sin x,x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,则 $h'(x)=-x\sin x-\sin x-x\cos x<0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上递减,知 $h(x)<h(0)=0$,于是 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上递减,

$\therefore g(x)_{\min}=g(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}$,$\therefore k\leqslant\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}<\frac{2}{\pi e}$.

综上,$k<\frac{2}{\pi e}$. ……………………………………………………………… (12 分)

(二)选考题:共 10 分,考生从 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. 解:(1)曲线 $C:\rho=4\sin\theta\Rightarrow\rho^2=4\rho\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=4y$,

即曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$. ……………………………………… (5 分)

(2)法1：$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ x^2+(y-2)^2=4, \end{cases} \Rightarrow (1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=4$,

即 $t^2+\sqrt{2}t-3=0$，得$\begin{cases} t_1+t_2=-\sqrt{2}, \\ t_1t_2=-3. \end{cases}$

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{2+12}=\sqrt{14}$. ………………………… (10 分)

法2：直线$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）化为直角坐标方程为 $x-y+1=0$，圆心$(0,2)$到直线 l 的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

得 $|PA|+|PB|=|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{14}$. ………………………………………… (10 分)

23. 解：(1) $f(x)=|2x-1|+|2x+2|=\begin{cases} -4x-1, x<-1, \\ 3, -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \\ 4x+1, x>\frac{1}{2}, \end{cases}$

$f(x)\leqslant 4$，即$\begin{cases} x<-1, \\ -4x-1\leqslant 4 \end{cases}$或$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \\ 3\leqslant 4 \end{cases}$或$\begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ 4x+1\leqslant 4, \end{cases}$

解得$\{x|-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\}$. ………………………………………………………………………… (5 分)

(2)证明：由(1)知 $f(x)_{\min}=m=3$，即$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=3(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$,

$$\therefore a+2b+3c=\frac{1}{3}(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c})$$

$$=\frac{1}{3}[3+(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b})+(\frac{a}{3c}+\frac{3c}{a})+(\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{2b})]$$

$$\geqslant\frac{1}{3}(3+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{a}{3c}\cdot\frac{3c}{a}}+2\sqrt{\frac{2b}{3c}\cdot\frac{3c}{2b}})=3,$$

当且仅当 $a=2b=3c=1$，即 $a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

综上，$a+2b+3c\geqslant 3$. ……………………………………………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。