

海南中学、海口一中、文昌中学、嘉积中学四校联合试题卷

时间：120 分钟 满分：150 分

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡相应位置上。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

第I卷（选择题）

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid |x - 2| < 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知复数 z 满足 $(z + 2i)(2 - i) = 5$, 则 $z =$ ()
 A. $2 - i$ B. $2 + i$ C. $-2 - 3i$ D. $-2 - i$
3. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} = (2, 2)$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ ()
 A. $2\sqrt{5}$ B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{3}$
4. 2022 年神舟接力腾飞，中国空间站全面建成，我们的“太空之家”遨游苍穹.太空中飞船与空间站的对接，需要经过多次变轨.某飞船升空后的初始运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，其远地点（长轴端点中离地面最远的点）距地面 d_1 ，近地点（长轴端点中离地面最近的点）距地面 d_2 ，地球的半径为 r ，则该椭圆的短轴长为 ()
 A. $\sqrt{d_1 d_2}$ B. $2\sqrt{d_1 d_2}$
 C. $\sqrt{(d_1 + r)(d_2 + r)}$ D. $2\sqrt{(d_1 + r)(d_2 + r)}$
5. 若抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线被曲线 $(x + 3)^2 + y^2 = 5$ 所截得的弦长为 2, 则 $p =$ ()
 A. 1 或 5 B. 2 或 10 C. 2 或 4 D. 4 或 8
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 42, $a_1 - a_4 = 21$, 则 $a_5 =$ ()
 A. 12 B. 6 C. 3 D. $\frac{3}{2}$
7. 设 $x, y > 1, z > 0$, 若 $z^2 = x \cdot y$, 则 $\frac{\lg z}{2\lg x} + \frac{\lg z}{4\lg y}$ 的最小值为 ()
 A. $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $2\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $2\sqrt{2}$

8. 已知实数 a, b, c 满足 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{\ln b}{b} = -\frac{\ln c}{c} < 0$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

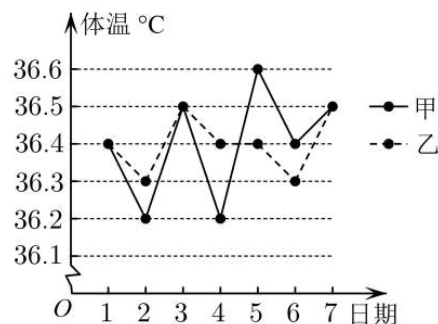
- A. $b < a < c$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $c < a < b$

二、多项选择题:本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的.全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 新冠肺炎疫情防控期间, 进出小区、超市、学校等场所需要先进行体温检测.某学校对一周内甲、乙两名同学的体温进行了统计, 其结果如图所示, 则下列

结论正确的是 ()

- A. 乙同学体温的极差为 0.3°C
 B. 甲同学体温的 75%分位数为 36.5°C
 C. 乙同学的体温比甲同学的体温稳定
 D. 甲同学体温的众数为 36.2°C 和 36.5°C , 中位数与平均数相等



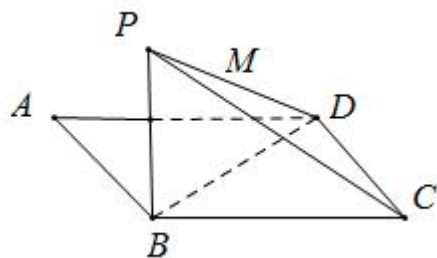
10. 将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再向上平移 2 个单位得到函数

$g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 则以下说法中正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + 2$
 B. $\left(-\frac{\pi}{4}, -2\right)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心
 C. $x = -\frac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴
 D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

11. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $AD = 2$, $\angle A = 60^{\circ}$, 沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起到 $\triangle PBD$ 的位置, 使得平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 下列说法正确的有 ()

- A. 三棱锥 $P-BCD$ 四个面都是直角三角形
 B. 平面 $PCD \perp$ 平面 PBD
 C. PD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 D. 点 B 到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$



12. 记 $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数, 若存在 $x_0 \in R$, 满足 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S 点”, 则下列说法正确的为 ()
- A. 函数 $f(x) = e^x$ 与 $g(x) = x + 1$ 存在唯一“S 点”
- B. 函数 $f(x) = \ln x$ 与 $g(x) = x - 2$ 存在两个“S 点”
- C. 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + 2x - 2$ 不存在“S 点”
- D. 若函数 $f(x) = ax^2 - 1$ 与 $g(x) = \ln x$ 存在“S 点”, 则 $a = \frac{e}{2}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. $(2x + \frac{1}{x})^4$ 的展开式中的常数项为_____.
14. 函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 4x + m$, 则 $f(-\frac{1}{2}) =$ _____.
15. 已知在四面体 $V - ABC$ 中, $VA = VB = VC = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ 则该四面体外接球的表面积为_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, F_1, F_2 分别为双曲线的左、右焦点, P 为双曲线上的第一象限内的点, 点 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 点 I 在 x 轴上的投影 H 的横坐标为_____, $\triangle IF_1F_2$ 的面积取值范围为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- 17 (本小题满分 10 分). $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 分别为 a, b, c . 已知 $\sin(A + C) = 8\sin^2 \frac{B}{2}$.
- (1) 求 $\cos B$;
- (2) 从下列①②③中选择两个作为条件, 证明另外一个条件成立:
- ① $b = 2$; ② $S_{\triangle ABC} = 2$; ③ $a + c = 6$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

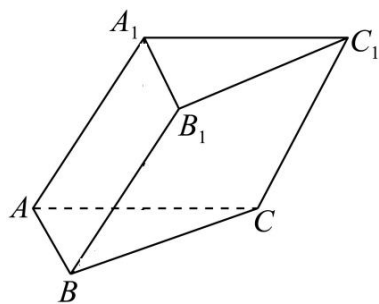
18 (本小题满分 12 分). 等差数列 $\{a_n\}(n \in N^*)$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且其中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	8	2
第二行	4	3	12
第三行	16	6	9

(1)请选择一个可能的 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 组合, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记(1)中您所选的数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 判断是否存在正整数 k , 使得 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列, 若有, 请求出 k 的值; 若没有, 请说明理由.

19 (本小题满分 12 分). 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形, 侧面 AA_1C_1C 为菱形, 点 A_1 在底面上的投影为 AC 的中点 D , 且 $AB = 2$.



(1)若 M, N 分别为棱 AB, B_1C_1 的中点, 求证: $B_1M \parallel$ 平面 CDN ;

(2) E 为 A_1B_1 的中点, 求直线 DE 与侧面 AA_1B_1B 所成角的正弦值.

20（本小题满分 12 分）

某地 A, B, C, D 四个商场均销售同一型号的冰箱，经统计，2022 年 10 月份这四个商场购进和销售该型号冰箱的台数如下表（单位：十台）：

	A 商场	B 商场	C 商场	D 商场
购进该型冰箱数 x	3	4	5	6
销售该型冰箱数 y	2.5	3	4	4.5

（1）已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；

（2）假设每台冰箱的售价均定为 4000 元．若进入 A 商场的甲、乙两位顾客购买这种冰箱的概率分别为 $p, 2p - 1$ ($\frac{1}{2} < p < 1$)，且甲乙是否购买冰箱互不影响，若两人购买冰箱总金额的期望不超过 6000 元，求 p 的取值范围．

参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$
$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

21（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，椭圆的右焦点 $F(1, 0)$

（1）求椭圆 C 的方程；

（2） A, B 是椭圆的左、右顶点，过点 F 且斜率不为 0 的直线交椭圆 C 于点 M, N ，直线 AM 与直线 $x = 4$ 交于点 P ．记 PA, PF, BN 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，是否存在实数 λ ，使得 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$ ？

22（本小题满分 12 分）．已知实数 $a > 0$ ，函数 $f(x) = x \ln a - a \ln x + (x - e)^2$ ， e 是自然对数的底数．

（1）当 $a = e$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求证： $f(x)$ 存在极值点 x_0 ，并求 x_0 的最小值．