2023 年 4 月稽阳联谊学校高三联考数学参考答案

一、选择题： ABCB DBDA

1. 答案 A．解析：$A=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right],B=(-\infty,1]$，则 $A\cap(\complement_R B)=\left(1,\frac{9}{2}\right]$，故选 A.

2. 答案 B．解析：$z=-2-i$，从而 $z=-2+i$，故选 B.

3. 答案 C．解析：$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\vec{m}+\frac{1}{2}\left(\vec{n}-\frac{1}{2}\vec{m}\right)=\frac{3}{4}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$，故选 C.

4. 答案 B．解析：$\cosh(x+y)=\dfrac{e^{x+y}+e^{-(c+y)}}{2}$, $\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y=\dfrac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$, 故选 B.

5. 答案 D．解析：$A_6^3+C_3^2\cdot A_6^2+C_3^3\cdot A_6^1=216$，故选 D.

6. 答案 B．解析：$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，可知 $2\alpha+\frac{\pi}{4}+2\beta+\frac{\pi}{4}=3\pi$，则 $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$，

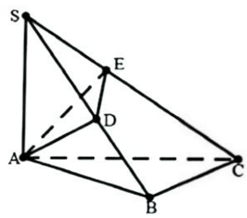
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-2\beta\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\beta\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}，\text{故选 B.}$$

7. 答案 D．解析：$\ln x-ax^2-b\le 0\Rightarrow \ln x^2-2ax^2-2b\le 0$，记 $f(x)=\ln x-2ax-2b$，$x\in(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2a，\quad f_{\max}(x)=f\left(\frac{1}{2a}\right)=-\ln(2a)-1-2b\le 0\Rightarrow 2b\ge-\ln(2a)-1，$$

$a+2b\ge a-\ln(2a)-1\ge-\ln 2$． 故选 D.

8. 答案 A.



记四面体 $S-ADE$，四棱锥 $A-BCED$，鳖臑 $S-ABC$ 的外接球

半径分别为 r_1,r_2,r，记 $SA=2a,AC=2b,SC=2c$，

易知 $AD\perp$ 面 SBC，则 $r_1=\frac{SA}{2}=a$，$r_2=\frac{AC}{2}=b,r=\frac{SC}{2}=c$

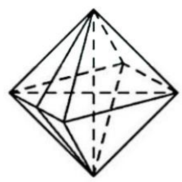
$$\frac{V_1+V_2}{V}=\frac{a^3+b^3}{c^3}=\frac{a^3+b^3}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}<1，\text{当且仅当 } a=b \text{ 时，}\left(\frac{V_1+V_2}{V}\right)_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

故选 A.

二、选择题：ABD ACD BC ABD

9. 答案：ABD．解析：该组数据的第 70 百分位数为 19，故 C 错误．

10. 答案：ACD．解析：如图，由$\triangle BAE,\triangle BEC,\triangle BCF,\triangle BFA$ 为正三角形可得 $AECF$ 为正方形，故 $AE\parallel CF$，故 A 正确；



取 AB 中点为 M，$\angle EMF$ 为二面角 $E-AB-F$ 的平面角，由

$EM=FM=\sqrt{3}$，$EF=2\sqrt{2}$，得 $\angle EMF\ne 90^\circ$，故 B 错误；

$\angle EAC$ 为直线 EA 与平面 $ABCD$ 所成的角，由 $EA=EC=2$，$AC=2\sqrt{2}$，

得 $\angle EMF=45^\circ$，故 C 正确；

$\triangle EMF$ 中边 MF 上的高即为点 E 到平面 ABF 的距离，由 $EM=FM=\sqrt{3}$，$EF=2\sqrt{2}$，得高为边

MF 上的高为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，故 D 正确.

11．答案：BC．解析：

设 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}$，$f'(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}=\dfrac{\dfrac{2x(x+1)}{x^2+1}-\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}<\dfrac{\dfrac{3x^2+3}{x^2+1}-\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}<0(x\geqslant 6)$，

故 A错误，C 正确；

因为 $a_n>0$，所以数列 $\{S_n\}$ 为递增数列，故 B 正确；

由 $a_n=\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}\geqslant\dfrac{\ln 2}{n+1}\geqslant\ln 2\cdot\ln(1+\dfrac{1}{n+1})$ 得 $S_n\geqslant\ln 2(\ln(n+2)-\ln 2)$，故 D 错误.

12．答案：ABD．解析：

函数 $f(x)$ 为连续函数，故 A 正确；

$$f(x+2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+k+\dfrac{4}{3}, & 2k\leqslant x<2k+\dfrac{4}{3},\\ 2x-2k-\dfrac{2}{3}, & 2k+\dfrac{4}{3}\leqslant x<2k+2,\end{cases}(k\in Z),$$

$$f(f(x+2))=\begin{cases}2(\dfrac{1}{2}x+k+\dfrac{4}{3})-2k-\dfrac{8}{3}, & 2k\leqslant x<2k+\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{2}(2x-2k-\dfrac{2}{3})+k+1-\dfrac{2}{3}, & 2k+\dfrac{4}{3}\leqslant x<2k+2,\end{cases}(k\in Z)=x$$，故 B 正确；

$f(0)=-\dfrac{2}{3}>-1$，故 C 错误；

$$f(x)-x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+k-\dfrac{2}{3}, & 2k\leqslant x<2k+\dfrac{4}{3},\\ x-2k-\dfrac{8}{3}, & 2k+\dfrac{4}{3}\leqslant x<2k+2,\end{cases}\leqslant\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\cdot 2k+k-\dfrac{2}{3}, & 2k\leqslant x<2k+\dfrac{4}{3},\\ 2k+2-2k-\dfrac{8}{3}, & 2k+\dfrac{4}{3}\leqslant x<2k+2,\end{cases}=-\dfrac{2}{3}$$

所以 $f(x)+f(x+1)\leqslant x-\dfrac{2}{3}+x+\dfrac{1}{3}\leqslant 2x$，故 D 正确.

三、填空题

13．答案：$\exists x_0\in(1,+\infty),x_0\leqslant 0$.

14．答案：$y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$，答案不唯一.

15．答案：$\dfrac{1}{6}$．解析：$\dfrac{y}{(x+y)^2}=\dfrac{y}{9+y^2}\leqslant\dfrac{1}{6}$.

16．答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．解析：设 $|QF_2|=4t$，$|PQ|=5t$，故 $|QF_1|=2a-4t$，$|PF_1|=9t-2a=a$，得 $t=\dfrac{1}{3}a$，

所以 $|QF_2|=\dfrac{4}{3}a$，$|PQ|=\dfrac{5}{3}a$，所以 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，故 $4c^2=2a^2-\dfrac{6}{5}a^2=\dfrac{4}{5}a^2$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题

17、解：（I）当 $n=1$ 时，$a_1=1$，当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases} S_n+1=2a_n \\ S_{n-1}+1=2a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n=2a_{n-1}$，所以 $a_n=2^{n-1}$ ……………3 分

（II）$b_n=\begin{cases} 2^{n-1}，n为奇数， \\ n，n为偶数， \end{cases}$

当 n 为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=(2^0+2^2+\cdots+2^{n-2})+(2+4+\cdots+n)$

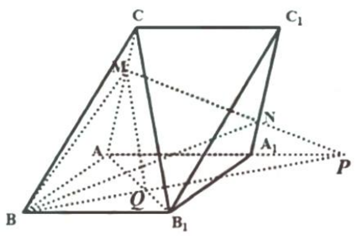
$=\dfrac{2^n-1}{3}+\dfrac{n(n+2)}{4}$ ……………6 分

当 n 为奇数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_n)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})=(2^0+2^2+\cdots+2^{n-1})+(2+4+\cdots+n-1)$

$=\dfrac{2^{n+1}-1}{3}+\dfrac{n^2-1}{4}$ ……………9 分

综上可知 $T_n=\begin{cases} \dfrac{2^n-1}{3}+\dfrac{n(n+2)}{4},n为偶数 \\ \dfrac{2^{n+1}-1}{3}+\dfrac{n^2-1}{4},n为奇数 \end{cases}$ ……………10 分

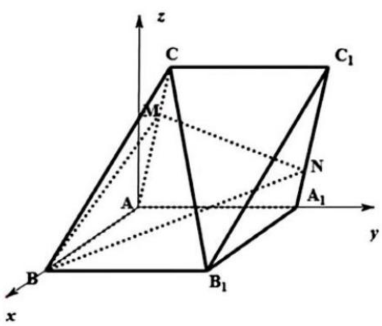
18、解：（I）如图，延长 MN，AA_1 交于 P，连结 PB，设 $AB_1\cap PB=Q$，连结 MQ



由 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{NA_1}{MA}=\dfrac{1}{2}$ 可知，$PA=2AA_1$，所以 $\dfrac{BB_1}{PA}=\dfrac{QB_1}{QA}=\dfrac{1}{2}$，所以 $MQ//CB_1$，又 $CB_1\not\subset$ 平面 BMN

所以 $B_1C//$ 平面 BMN ……………6 分

（II）过点 A 作平面 ABB_1A_1 的垂线 Az，因为 AB，AA_1，Az 两两互相垂直，可以建立空间直角坐标系，



因为 $BC=\sqrt{3}AB$，所以 $\angle BAC=120^\circ$，设 $AB=3a$，

所以$B(3a,0,0)$，$M(-a,0,\sqrt{3}a)$，$N(-\frac{a}{2},3a,\frac{\sqrt{3}a}{2})$

所以$\overrightarrow{BM}=(-4a,0,\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{BN}=(-\frac{7}{2}a,3a,\frac{\sqrt{3}a}{2})$，所以平面$BMN$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},8)$

又$\overrightarrow{AM}=(-a,0,\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{AN}=(-\frac{a}{2},3a,\frac{\sqrt{3}a}{2})$，所以平面$AMN$的法向量$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},0,1)$

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{14}{2\times\sqrt{79}}=\frac{7\sqrt{79}}{79}$

所以二面角$B-MN-A$的余弦值是$\frac{7\sqrt{79}}{79}$ ……………12 分

19、解：（I）$\cos 2A-\cos 2B=8\sin B\sin C\cos A$

$\Rightarrow \cos[(A+B)+(A-B)]-\cos[(A+B)+(A-B)]=8\sin B\sin C\cos A$

$\Rightarrow -2\sin(A+B)\sin(A-B)=8\sin B\sin C\cos A$

$\Rightarrow -\sin(A-B)=4\sin B\cos A$

$\Rightarrow -\sin A\cos B+\cos A\sin B=4\sin B\cos A$

$\Rightarrow -\sin A\cos B=3\sin B\cos A\Rightarrow \tan A=-3\tan B$ ……………6 分

（II）$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{6}$

$\Rightarrow 3\sin B\sin C=\sin A$

$\Rightarrow 3\sin B\sin A\cos B+3\sin B\cos A\sin B=\sin A$

$\Rightarrow \tan A=\frac{3\sin^2 B}{1-3\sin B\cos B}$

$\Rightarrow -3\tan B=\frac{3\tan^2 B}{\tan B^2-3\tan B+3}$

$\Rightarrow \tan B^2-4\tan B+3=0$

$\Rightarrow \tan B=1$ 或 $\tan B=3$

若$\tan B=3$，则$60^\circ<B<75^\circ$，$A>120^\circ$，三角形不存在

所以$B=45^\circ$ ……………12 分

20、解：（I）

因为$P(A)=C_4^1\cdot(\frac{1}{2})^4\cdot(\frac{1}{2})^3+C_4^2\cdot(\frac{1}{2})^4\cdot C_3^1\cdot(\frac{1}{2})^3+C_4^3\cdot(\frac{1}{2})^4\cdot C_3^2\cdot(\frac{1}{2})^3+C_4^4\cdot(\frac{1}{2})^4\cdot C_3^3\cdot(\frac{1}{2})^3=\frac{35}{2^7}$，

$P(AB)=C_4^3\cdot(\frac{1}{2})^4\cdot C_3^2\cdot(\frac{1}{2})^3=\frac{12}{2^7}$，

所以$P(B|A)=\frac{12}{35}$ ……………6 分

（II）$P(A)=\frac{C_{n+1}^1\cdot C_n^0+C_{n+1}^2\cdot C_n^1+C_{n+1}^3\cdot C_n^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}\cdot C_n^n}{2^{2n+1}}$

$P(B)=\dfrac{C_{n+1}^{0}\cdot C_{n}^{0}+C_{n+1}^{1}\cdot C_{n}^{1}+C_{n+1}^{2}\cdot C_{n}^{2}+\cdots+C_{n+1}^{n}\cdot C_{n}^{n}}{2^{2n+1}}$

因为$C_{n+1}^{k+1}\cdot C_{n}^{k}=C_{n+1}^{n-k}\cdot C_{n}^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots n$

所以$P(A)=P(B)$ ……………12 分

21、解：（I）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\dfrac{|AF|}{|AP|}=\dfrac{|BF|}{|BP|}$得$\dfrac{x_1+\frac{p}{2}}{x_1+1}=\dfrac{x_2+\frac{p}{2}}{x_2+1}$ ……………2 分

解得$p=2$，故抛物线C的方程为$y^2=4x$. ……………4 分

（II）联立$l_{PF}:y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$与$l_{BQ}:y=2x-2x_2+y_2$得$Q(\dfrac{4}{5}x_2-\dfrac{2}{5}y_2+\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{5}x_2+\dfrac{1}{5}y_2+\dfrac{2}{5})$

由$\overline{BQ}=\overline{QM}$ 得$M(\dfrac{3}{5}x_2-\dfrac{4}{5}y_2+\dfrac{2}{5},-\dfrac{4}{5}x_2-\dfrac{3}{5}y_2+\dfrac{4}{5})$

要证A，F，M三点共线，即证$\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{-4x_2-3y_2+4}{3x_2-4y_2-3}$①， ……………8 分

设直线AB的方程为$x=my-m-1$，

将$x_1=my_1-m-1$与$x_2=my_2-m-1$代入①得$\dfrac{y_1}{my_1-m-2}=\dfrac{(-4m-3)y_2+4m+8}{(3m-4)y_2-3m-6}$，化简得

$(m+2)((4m-2)y_1y_2-(4m+3)(y_1+y_2)+4(m+2))=0$②.

联立$x=my-m-1$与$y^2=4x$得$y^2-4my+4m+4=0$，故$y_1y_2=4m$，$y_1+y_2=4m+4$，

所以$(4m-2)y_1y_2-(4m+3)(y_1+y_2)+4(m+2)=(4m-2)(4m+4)-4m(4m+3)+4(m+2)=0$，故②成立，所以$A$，$F$，$M$三点共线. ……………12 分

22、解：（I）$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\cos x\Rightarrow f'(\pi)=-e^{\pi}+1$，又$f(\pi)=0$

所以切线方程是$y=(1-e^{\pi})(x-\pi)$ ……………2 分

（II）$g(x)=(e^x-1)\sin x-x^2$

①当$x\in[\pi,2\pi)$时，因为$(e^x-1)\sin x\le 0$，$-x^2<0$，所以$g(x)<0$，即$g(x)$无零点……………4 分

②当$x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi)$时，$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\cos x-2x$，$g''(x)=2e^x\cos x+\sin x-2$

因为$2e^x\cos x\le 0$，$\sin x-2<0$，所以$g''(x)<0$，即$g'(x)$在$[\dfrac{\pi}{2},\pi)$上递减

又$g'(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$（$e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0\Leftrightarrow e^{\pi}>\pi^2$），$g'(\pi)=-e^{\pi}+1-2\pi<0$

所以存在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2},\pi)$，使得 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},x_0)$ 上递增，在 (x_0,π) 上递减

又 $g(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - \frac{\pi^2}{4} > e^{\frac{\pi}{2}} - 4 > 0$，所以 $g(x_0) > g(\frac{\pi}{2}) > 0$，而 $g(\pi) = -\pi^2 < 0$

所以 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上存在唯一零点 ……………8 分

③当 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 时，设 $h(x) = g''(x)$，则 $h'(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) + \cos x$，$h''(x) = -4e^x \sin x - \sin x$

因为 $-4e^x \sin x - \sin x < 0$，所以 $h''(x) < 0$，即 $h'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递减

又 $h'(0) = 3 > 0$，$h'(\frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{\pi}{2}} < 0$，

所以存在 $x_1 \in (0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g''(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上递增，在 $(x_1,\frac{\pi}{2})$ 上递减

又 $g''(0) = 0$，$g''(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$，

所以存在 $x_2 \in (0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上递增，在 $(x_2,\frac{\pi}{2})$ 上递减

又 $g'(0) = 0$，$g'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - \pi > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，所以 $g(x) > g(0) = 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上无零点

综上可知，$g(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上存在唯一零点 ……………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。