



2016年全国高中数学联合竞赛一试试题(A卷)

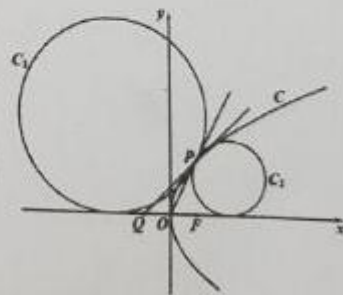
一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设实数 a 满足 $a < 9a^3 - 11a < |a|$, 则 a 的取值范围是_____.
2. 设复数 z, w 满足 $|z| = 3, (z + w)(\bar{z} - w) = 7 + 4i$, 其中 i 是虚数单位, \bar{z}, \bar{w} 分别表示 z, w 的共轭复数, 则 $(z + 2w)(\bar{z} - 2w)$ 的模为_____.
3. 正实数 u, v, w 均不等于 1, 若 $\log_u vw + \log_v w = 5, \log_u u + \log_v v = 3$, 则 $\log_u u$ 的值为_____.
4. 袋子 A 中装有 2 张 10 元纸币和 3 张 1 元纸币, 袋子 B 中装有 4 张 5 元纸币和 3 张 1 元纸币. 现随机从两个袋子中各取出两张纸币, 则 A 中剩下的纸币面值之和大于 B 中剩下的纸币面值之和的概率为_____.
5. 设 P 为一圆锥的顶点, A, B, C 是其底面圆周上的三点, 满足 $\angle ABC = 90^\circ$, M 为 AP 的中点. 若 $AB = 1, AC = 2, AP = \sqrt{2}$, 则二面角 $M - BC - A$ 的大小为_____.
6. 设函数 $f(x) = \sin^4 \frac{kx}{10} + \cos^4 \frac{kx}{10}$, 其中 k 是一个正整数. 若对任意实数 a , 均有 $\{f(x) | a < x < a + 1\} = \{f(x) | x \in \mathbf{R}\}$, 则 k 的最小值为_____.
7. 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于点 P, Q , 使得 $\angle F_1 P Q = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1 P Q$ 的内切圆半径是_____.
8. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 $1, 2, \dots, 100$ 中的 4 个互不相同的数, 满足 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4)^2$, 则这样的有序数组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的个数为_____.

二、解答题：本大题共3小题，共56分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9. (本题满分16分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3\overline{CA} \cdot \overline{CB}$. 求 $\sin C$ 的最大值.
10. (本题满分20分) 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(1) = 1$, 且对任意 $x < 0$, 均有 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = xf(x)$. 求 $f(1)f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{99}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{98}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{50}\right)f\left(\frac{1}{51}\right)$ 的值.

11. (本题满分20分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是 x 轴正半轴上的一个动点. 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 C . 设 P 是第一象限内 C 上的一点, Q 是 x 轴负半轴上一点, 使得 PQ 为 C 的切线, 且 $|PQ| = 2$. 圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P , 且均与 x 轴相切. 求点 F 的坐标, 使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值.



后续将会第一时间在[自主招生在线微信公众号](#)公布本次联赛试题和答案，敬请期待！
更多数学竞赛相关资讯和消息，请关注自主招生在线官方微信，新鲜、独家、有料！

自主招生在线（微信 ID: zizzsw）



自主招生在线
www.zizzs.com

 自主招生在线
www.zizzs.com
扫一扫 关注官方微信

 自主招生在线
www.zizzs.com

 自主招生在线
www.zizzs.com