数学试卷

参考答案、提示及评分细则

1. C　根据已知得 $z=\frac{-1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 故选 C.

2. C　因为 $A=\{x\,|\,|x-1|<2\}=\{x\,|\,-1<x<3\}$，$B=\{y\,|\,y=2^x,x\in[0,2]\}=\{y\,|\,1\leqslant y\leqslant 4\}$，所以 $A\cap B=[1,3)$，$A\cup B=(-1,4]$. 故选 C.

3. A　令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，结合 $t>0$，解得 $0<t\leqslant\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

4. B　由题意知 $a^2b-(a^2+1)=0$ 且 $a\neq 0$，所以 $a^2b=a^2+1$，$ab=\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$，所以 $|ab|=\left|a+\frac{1}{a}\right|=|a|+\frac{1}{|a|}\geqslant 2$，当且仅当 $a=\pm1$ 时取等号. 故选 B.

5. C　由 $y=xf'(x)$ 的图象知，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$（等号仅有可能在 $x=0$ 处取得），$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，结合选项只有 C 符合. 故选 C.

6. A　根据题意排课顺序有两类，一类是：在“射”与“数”之间间隔一艺，这样的排课方法数为：$A_2^2\cdot C_4^1\cdot A_4^4=192$；另一类是：在“射”“数”两艺相邻，这样的排课方法数为：$A_2^2\cdot A_5^5=240$，因此全部的排课方法数为：$192+240=432$. 故选 A.

7. D　根据已知得到 $F(2,0)$，圆 $A:(x+1)^2+(y+4)^2=1$，所以 $A(-1,-4)$，结合抛物线的定义得到 $d+2=|MF|$，得到 $(|MN|+d)_{\min}=|AF|-1-2=\sqrt{(2+1)^2+(-4)^2}-1-2=2$. 故选 D.

8. B　当 $k<0$ 时，$\mathrm{e}^{kx}+1<2$，而当 $x\to 0$ 时，$\frac{(x+1)\ln x}{kx}\to+\infty$，不符合题意，所以 $kx(\mathrm{e}^{kx}+1)>(1+x)\ln x$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $(1+\mathrm{e}^{kx})\ln \mathrm{e}^{kx}>(1+x)\ln x$. 设 $f(x)=(1+x)\ln x$，则 $f(\mathrm{e}^{kx})>f(x)$，$f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}$，令 $g(x)=f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值为 2，所以 $f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $\mathrm{e}^{kx}>x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即有 $k>\frac{\ln x}{x}$ 恒成立，设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，得 $h(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值，且最大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，此时 $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$. 故选 B.

9. AD　对于 A，结合残差图，如果样本数据点分布的带状区域越狭窄，说明该模型的拟合精度越高，故 A 正确；对于 B，在频率分布直方图中，各小长方形的面积等于相应各组的频率，故 B 错误；对于 C，因为 $8\times 0.75=6$，故该组数据的第 75 百分位数为 10，故 C 错误；对于 D，设该校女生人数为 n，由已知可得 $\frac{55}{100}=\frac{1\ 500-n}{1\ 500}$，解得 $n=675$，故 D 正确. 故选 AD.

10. BCD　设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，$\{b_n\}$ 的公差为 $d(d>0)$，$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，$b_n=b_1+(n-1)d=b_1-d+nd$，作出 a_n 与 b_n 关于 n 的函数图象，则两函数图象在 $n=3$，$n=7$ 处相交，故当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时，$a_n<b_n$，当 $n\leqslant 2$ 或 $n\geqslant 8$ 时，$a_n>b_n$. 故选 BCD.

11. AC　对于 A:如图 1 所示,因为 $AB=BC$,所以四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AC\perp BD$,又因为几何体为长方体,所以 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $AC\perp DD_1$,又因为 $BD\cap DD_1=D$,所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1,又因为 $BP\subset$ 平面 BDD_1,所以 $AC\perp BP$,故结论正确;对于 B,如图 2 所示,

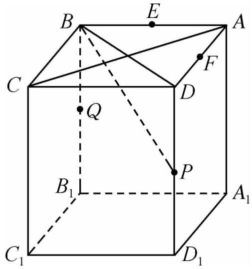


图 1

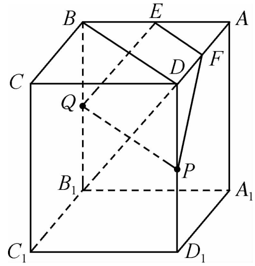


图 2

假设 $B_1D\perp$ 平面 $EFPQ$,因为 $PQ\subset$ 平面 $EFPQ$,所以 $B_1D\perp PQ$,所以 $B_1D\perp BD$,显然 $B_1D\perp BD$ 不成立,故假设错误,所以结论错误;对于 C,如图 3 所示,连接 BD,C_1D,由条件可知 $EF/\!/BD$,$FP/\!/AD_1$,$BC_1/\!/AD_1$,所以 $FP/\!/BC_1$,又因为 $BC_1\cap BD=B$,$EF\cap FP=F$,所以平面 $BC_1D/\!/$平面 $EFPQ$,故结论正确;对于 D,如图 4 所示,

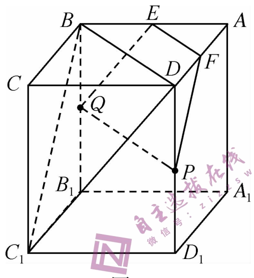


图 3

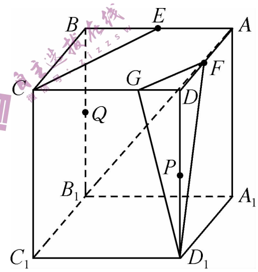


图 4

在 CD 上取靠近 D 的一个四等分点 G,连接 FG,D_1G,易证 $FG/\!/EC$,所以 CE 和 FD_1 所成角即为$\angle D_1FG$ 或其补角,设 $DD_1=3$,则 $AD=CD=2$,易求 $D_1F=\sqrt{10}$,$D_1G=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$,$FG=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,所以 $\cos\angle D_1FG=\dfrac{\frac{5}{4}+10-\frac{37}{4}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$,故结论错误. 故选 AC.

12. ABD　不妨先探究双曲线在第一象限的部分(其他象限由对称性同理可得). 由 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,得 $y=\sqrt{b^2x^2-b^2}$,所以 $y'=\dfrac{b^2x}{\sqrt{b^2x^2-b^2}}$,则在 $P(x_0,y_0)$的切线斜率 $y'=\dfrac{b^2x_0}{\sqrt{b^2x_0^2-b^2}}=\dfrac{b^2x_0}{y_0}$,所以在点 $P(x_0,y_0)$处的切线方程为 $y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{y_0}(x-x_0)$,又有 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$,化简即可得切线方程为 $x_0x-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$. 设$P(x_0,y_0)$是双曲线在第一象限的一点,$A(x_1,y_1)$是切线与渐近线在第一象限的交点,$B(x_2,y_2)$是切线与渐近线在第四象限的交点,双曲线的渐近线方程是 $y=\pm bx$,联立$\begin{cases}x_0x-\dfrac{y_0y}{b^2}=1,\\ y=bx,\end{cases}$解得 $A\left(\dfrac{b}{bx_0-y_0},\dfrac{b^2}{bx_0-y_0}\right)$,联立$\begin{cases}x_0x-\dfrac{y_0y}{b^2}=1,\\ y=-bx,\end{cases}$解得 $B\left(\dfrac{b}{bx_0+y_0},\dfrac{-b^2}{bx_0+y_0}\right)$,所以 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x_0}\cdot\left|\dfrac{b^2}{bx_0-y_0}+\dfrac{b^2}{bx_0+y_0}\right|=\dfrac{b^2}{2x_0}\cdot\dfrac{2bx_0}{b^2x_0^2-y_0^2}=b$,故 A 正确;由$\dfrac{\frac{b}{bx_0-y_0}+\frac{b}{bx_0+y_0}}{2}=x_0$,$\dfrac{\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{-b^2}{bx_0+y_0}}{2}=y_0$,可知 $P(x_0,y_0)$是 A,B 的中点,B 正确;$|AB|=\sqrt{\left(\dfrac{b}{bx_0-y_0}-\dfrac{b}{bx_0+y_0}\right)^2+\left(\dfrac{b^2}{bx_0-y_0}+\dfrac{b^2}{bx_0+y_0}\right)^2}=2\sqrt{(b^2+1)x_0^2-1}$,又因为 $x_0\geqslant 1$,所以 $|AB|\geqslant$

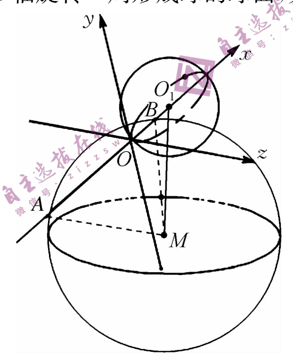
$2\sqrt{(b^2+1)-1}=2b$，即 $|AB|_{\min}=2b$，C 错误；易知点 D 的坐标为 $\left(\frac{1}{x_0},0\right)$，$PF_1$ 方程为 $y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0$，所以 D 到直线 PF_1 的距离 $d_1=\frac{\left|\frac{y_0}{x_0}+cy_0\right|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{\left|\frac{y_0}{x_0}(cx_0+1)\right|}{\sqrt{b^2(x_0^2-1)+(x_0+c)^2}}=\left|\frac{y_0}{x_0}\right|$，同理可求得 D 到直线 PF_2 的距离 $d_2=\left|\frac{y_0}{x_0}\right|$，所以 PD 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，因为 $\overrightarrow{F_1D}=2\overrightarrow{DF_2}$，所以 $|PF_1|=2|PF_2|$，又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4c^2=4a^2+16a^2-2\cdot 2a\cdot 4a\times\frac{1}{4}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，D 正确. 故选 ABD.

13. $\frac{9}{2}$　易得 $|\overrightarrow{CO}|=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CA}|\cos\frac{\pi}{6}=\frac{9}{2}$.

14. $-\frac{1}{2}$　由题意知 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\beta-\cos\beta$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}=\beta-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，或者 $\alpha-\frac{\pi}{6}+\beta-\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $\alpha-\frac{\pi}{6}=\beta-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 时，$\alpha=\beta+2k\pi$，此时 A,B 点重合，不合题意，当 $\alpha-\frac{\pi}{6}+\beta-\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi$ 时，$\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

15. $3e^{-2}$　因为函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以 $f(2-x)=f(x)$，即 $f(\ln 3)=f(2-\ln 3)=e^{-(2-\ln 3)}=\frac{e^{\ln 3}}{e^2}=3e^{-2}$.

16. 圆（2 分）　$\frac{12\sqrt{13}\pi}{13}$（3 分）　设球的半径为 r，则 $4\pi r^2=36\pi$，解得 $r=3$，在平面内，动点 P 的轨迹组成一个圆，以线段 AB 所在直线为 x 轴，以靠近点 B 且长度为 1 处为坐标原点，则 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，此时动点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，设其圆心为 O_1，则在空间中，z 轴和 xOy 坐标平面垂直，动点 P 的轨迹为 xOy 平面中的圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 绕 x 轴旋转一周形成球的球面，如图所示，



所以点 P 的轨迹是两个球面的交线，这两个球分别是以 M 和 O_1 为球心，在 $\triangle MBO_1$ 中，结合余弦定理得到 $|O_1M|=\sqrt{3^2+1-2\times3\times1\times\cos120^\circ}=\sqrt{13}$，设交线所围成的圆半径为 R，则 $\frac{1}{2}\times\sqrt{13}R=\frac{1}{2}\times3\times2$，解得 $R=\frac{6\sqrt{13}}{13}$，所以交线的长度为 $\frac{12\sqrt{13}\pi}{13}$.

17. 解：

	有兴趣	没兴趣	合计
男	170	30	200
女	80	20	100
合计	250	50	300

………………………………………………………………………………………… 2 分

零假设 H_0：对羽毛球运动感兴趣与性别无关.

$\chi^2=\dfrac{300\times(170\times20-80\times30)^2}{200\times100\times250\times50}=1.2<2.706=x_{0.1}$，

故根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，假设成立，我们认为“对羽毛球运动是否有兴趣与性别无关”.

………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由题意可知随机变量 X 的取值为 0，1，2，3，

$\therefore P(X=0)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{25}$；$P(X=1)=C_2^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^1\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{24}{125}$；

$P(X=2)=C_2^1\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$；$P(X=3)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$；

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{24}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{9}{25}$

………………………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{4}{25}+1\times\dfrac{24}{125}+2\times\dfrac{36}{125}+3\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{231}{125}$. ………………………………… 10 分

18. 解：(1)在△BDC 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

………………………………………………………………………………………… 2 分

在△ADC 中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC=4$，

所以 AC 的长度为 2. ……………………………………………………………… 5 分

(2)设 $BC=x$，则 $AC=2x$，在△ACD 和△ACB 中分别利用余弦定理得

$\cos A=\dfrac{4x^2+1-2}{2\cdot2x\times1}=\dfrac{4x^2+4-x^2}{2\cdot2x\times2}$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$(负根舍). ……………………………… 8 分

因为 $\angle ADC+\angle BDC=\pi$，所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$， …………………………………… 9 分

在△BCD 中，由正弦定理得 $\dfrac{\sin\angle BDC}{\sin B}=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

即 $\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)由 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2n}{n+1}$ 可知，当 $n\geqslant2$ 时有 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{n-1}}=\dfrac{2(n-1)}{n}$，

两式相减得 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$， ……………………………… 2 分

又当 $n=1$ 时 $\dfrac{1}{S_1}=1$ 即 $S_1=1$ 也符合上式，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. …………………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}=n$，$n=1$ 时也满足，

所以 $b_n=n$. …………………………………………………………………………… 5 分

(2)结合(1)得 $c_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

$T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，①

$\dfrac{1}{2}T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，②

①−②得 $\dfrac{1}{2}T_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=2-(n+2)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，……………………………………………………………… 7 分

所以 $T_n=4-(2n+4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ………………………………………………………………………… 8 分

由 $T_n=4-n$,得 $4-(2n+4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=4-n$,即$\frac{n+2}{n}=2^{n-1}$.

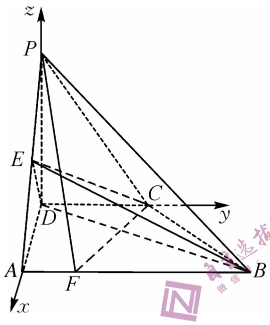
显然当 $n=2$ 时,上式成立,设 $f(n)=\frac{n+2}{n}-2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,即 $f(2)=0$. ………………………… 10 分

因为 $f(n+1)-f(n)=\left(\frac{n+3}{n+1}-2^n\right)-\left(\frac{n+2}{n}-2^{n-1}\right)=-\left[\frac{2}{n(n+1)}+2^{n-1}\right]<0$,

所以 $f(n)$单调递减,所以 $f(n)=0$ 只有唯一解 $n=2$,

所以存在唯一正整数 $n=2$,使得 $T_n=4-n$ 成立. ………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由题意可得 DA,DC,DP 两两互相垂直,所以可以以 D 为原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 如图所示:



$\therefore A(1,0,0),B(1,2,0),C(0,1,0),P(0,0,1),E\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0),\overrightarrow{CP}=(0,-1,1),\overrightarrow{CE}=(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$. ……………………………………… 2 分

设平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x-y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-y+z=0,\end{cases}$不妨令 $y=1$,$\therefore\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$. ……………………………………… 3 分

设点 E 到平面 PBC 的距离为 d,则 $d=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………… 5 分

又因为 $BC=PC=\sqrt{2},PB=\sqrt{6}$,$\therefore\triangle PBC$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$四面体 $BCEP$ 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}$. ……………………………………………… 6 分

(2)设点 F 坐标为$(1,t,0)$,$\therefore\overrightarrow{CF}=(1,t-1,0),\overrightarrow{DB}=(1,2,0)$.

由$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DB}=0$,$\therefore t=\frac{1}{2}$,$\therefore F\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$\therefore\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$. …………………………………… 7 分

设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AP}=(-\lambda,0,\lambda)$,$\lambda\in[0,1]$,$\therefore\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=\left(-\lambda,-\frac{1}{2},\lambda\right)$.

易求平面 PFC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$, ………………………………………………………………… 8 分

$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=\lambda-1$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{FE},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\lambda-1}{3\sqrt{2\lambda^2+\frac{1}{4}}}=\frac{2\lambda-2}{3\sqrt{8\lambda^2+1}}$, ………………………………………………………… 9 分

$\because FE$ 与面 PFC 所成角的余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{3}$,正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………… 10 分

$\therefore\left|\frac{2\lambda-2}{3\sqrt{8\lambda^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,整理得 $20\lambda^2+8\lambda-1=0$,$\therefore\lambda=\frac{1}{10}$,$\lambda=-\frac{1}{2}$(舍去),

$\therefore$存在满足条件的点 E,$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{10},0,\frac{1}{10}\right)$且$|AE|=\frac{\sqrt{2}}{10}$. ……………………………………… 12 分

21. 解：(1)结合已知得$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\times 2c\times b=9\sqrt{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ …………………………………… 2 分

解得 $a=6,b=3,c=3\sqrt{3}$， …………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$. …………………………………… 4 分

(2)根据已知得到 $a=2b$，设椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，

根据点 P 在椭圆内，即$\dfrac{1}{4b^2}+\dfrac{0}{b^2}<1$，解得 $b^2>\dfrac{1}{4}$， …………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

代入椭圆 C 的方程并消去 y 得$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-b^2)=0$， …………………………………… 6 分

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\dfrac{-2k}{1+4k^2}$. …………………………………… 8 分

设 $Q(x_0,y_0)$，因为$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OQ}$，

所以 $x_0=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$y_0=\dfrac{-2k}{1+4k^2}$，所以 $Q\left(\dfrac{8k^2}{1+4k^2},\dfrac{-2k}{1+4k^2}\right)$， …………………………………… 9 分

将该点坐标代入椭圆 C 的方程得 $b^2=\dfrac{4k^2}{1+4k^2}=\dfrac{4k^2+1-1}{1+4k^2}=1-\dfrac{1}{1+4k^2}$， …………………………………… 11 分

显然，随着 k 的增大，b 在增大，又 $0<k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以当 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，b 取最大值，且最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $f'(x)=(x+1-2a)e^x$， …………………………………… 1 分

当 $1-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0$，

此时函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增； …………………………………… 2 分

当 $1-2a<0$，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>2a-1$，令 $f'(x)<0$，解得 $0\leqslant x<2a-1$，

函数 $f(x)$在$(2a-1,+\infty)$上单调递增，在$[0,2a-1)$上单调递减. …………………………………… 3 分

综上，当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，函数 $f(x)$单调递增区间为$[0,+\infty)$；当 $a>\dfrac{1}{2}$时，单调递增区间为$(2a-1,+\infty)$，递减区间为$[0,2a-1)$. …………………………………… 4 分

(2)解：设函数 $h(x)=f(x)-g(x)=xe^x-2ae^x+ax+2$，则

$h'(x)=(x+1-2a)e^x+a$， …………………………………… 5 分

令 $\varphi(x)=(x+1-2a)e^x+a$，则 $\varphi'(x)=(x+2-2a)e^x$， …………………………………… 6 分

当 $2-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$，即 $\varphi(x)=(x+1-2a)e^x+a\geqslant\varphi(0)=1-a\geqslant 0$，

即 $h'(x)=(x+1-2a)e^x+a\geqslant 0$，所以 $h(x)=xe^x-2ae^x+2ax+2\geqslant h(0)=2-2a\geqslant 0$ 成立，此时符合题意；

当 $2-2a<0$，即 $a<1$ 时，令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x<2-2a$，所以 $\varphi(x)$在区间$[0,2-2a)$上单调递减，又 $\varphi(0)=1-a<0$，此时 $h(x)$在$[0,2-2a)$上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=2-2a<0$，显然不满足题意.

综上，$a\leqslant 1$. …………………………………… 8 分

(3)证明：取 $a=1$，由(2)知 $xe^x-2e^x+x+2\geqslant 0$，

因为 $x\geqslant 0$，令 $x=\ln t(t\geqslant 1)$，代入得到

$t\ln t-2t+\ln t+2\geqslant 0$，即 $\ln t\geqslant\dfrac{2t-2}{1+t}$，且$\dfrac{2t-2}{1+t}=2-\dfrac{4}{t+1}\in[0,2)$， …………………………………… 9 分

令$\dfrac{2t-2}{1+t}=\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，即 $t=\dfrac{2n+1}{2n-1}$，

代入化简得到$\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}=\ln(2n+1)-\ln(2n-1)$，

所以 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<(\ln 3-\ln 1)+(\ln 5-\ln 3)+\cdots+[\ln(2n+1)-\ln(2n-1)]=\ln(2n+1)$成立.

…………………………………… 12 分