江西省名校协作体联盟第二次联考模拟考试

理科数学参考答案

一、选择题：本大题包括12小题，每小题5分，共60分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	B	C	A	B	D	B	D	B	B

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $[2\sqrt{3},4]$　　14. $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]\cup[1,+\infty)$

15. $(\frac{12}{25},\frac{16}{25})$　　16. 3　4

三、解答题。

17. 解：(1) $\sin^2B-\sqrt{3}\sin B\sin C+\frac{3}{4}\sin^2C=\frac{1}{4}\cos^2C=\left(\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)^2$

$\Rightarrow$ ① $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C=\sin(C+30^\circ)$

$\Rightarrow B=C+30^\circ$（舍）或 $B+C=150^\circ$ 即 $A=30^\circ$

② $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C=\sin(C-30^\circ)$

$\Rightarrow B=C-30^\circ$（舍）或 $B+C=210^\circ$（舍）

综上 $A=30^\circ$

(2) $T=\frac{c^2}{c\cdot|PD|}+\frac{4a^2}{a\cdot|PE|}+\frac{b^2}{b\cdot|PF|}\geqslant\frac{(b+c+4)^2}{2S_{\triangle ABC}}=\frac{2(b+c+4)^2}{bc}$

又由余弦定理可知：$b^2+c^2-4=\sqrt{3}bc$

$\Rightarrow bc=\frac{(b+c)^2-4}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow T\geqslant2(2+\sqrt{3})\cdot\frac{2(b+c+4)^2}{(b+c)^2-4}\xlongequal{b+c+4=m}2(2+\sqrt{3})\cdot$

$\frac{m^2}{m^2-8m+12}\xlongequal{\frac{1}{m}=k}\frac{1}{12k^2-8k+1}=\frac{1}{(6k-1)(2k-1)}$

又 $bc=\frac{(b+c)^2-4}{2+\sqrt{3}}\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}\Rightarrow b+c\leqslant4\sqrt{2+\sqrt{3}}=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$\Rightarrow k\in\left[\frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4},\frac{1}{6}\right]\Rightarrow T\geqslant\frac{12+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{7+4\sqrt{3}}$

$=36-20\sqrt{2}-20\sqrt{3}+12\sqrt{6}$

当且仅当 $b=c=2+\sqrt{3}$ 时取等

18．解：(1) 设 AC 交 BD 于 O

以 O 为原点，OC 为 x 轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴建立直角坐标系

则 $E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$G(\sqrt{2}(1-\mu),0,\sqrt{2}\mu)$，$F(-\sqrt{2}(1-\lambda),0,\sqrt{2}\lambda)$

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别为面 BDP，面 EFG 的一个法向量

易知 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{n}_2=(\mu-\lambda,s,t)$

$\Rightarrow \mu-\lambda=0$

$\Rightarrow FG\,/\!/\,AC$

又 $AC\perp BD$，$AC\perp PB$，$BD\cap PB=B\Rightarrow AC\perp$ 面 BDP

即 $l\perp$ 面 BDP

(2) 易证 $\mu=\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$K=D$

$|TB|^2+|TD|^2=|TO|^2+|OB|^2+2|TO||OB|\cos\alpha+|TO|^2+|OD|^2-2|TO||OD|\cos\alpha$

$=2|TO|^2+2|OB|^2$

$\Rightarrow m=4|TO|^2+4|OB|^2+2\sqrt{2}|TP|^2=4|TO|^2+2\sqrt{2}|TP|^2+8$

过 C 作 CO' 平分 $\angle POC$ 交 PO 于 O'

$\Rightarrow \frac{PO'}{OO'}=\sqrt{2}\ \Rightarrow 4|TO|^2+2\sqrt{2}|TP|^2=(2\sqrt{2}+4)|TO'|^2+2\sqrt{2}|O'P|^2+4|OO'|^2$

$\Rightarrow m=(2\sqrt{2}+4)|TO'|^2+\frac{8(\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}}+8$

又有且仅有五个 T 满足条件，O' 为 $P-ABCD$ 内切圆圆心

$\Rightarrow |TO'|=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$\Rightarrow m=4\sqrt{2}+8$

19．解 (1) 由题意 $a=2$

又 $|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) $E:\begin{cases}x=\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}\\ y=\frac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数)

设 $A:\begin{cases}x=\frac{2(1-A^2)}{1+A^2}\\ y=\frac{2A}{1+A^2}\end{cases}$，$B:\begin{cases}x=\frac{2(1-B^2)}{1+B^2}\\ y=\frac{2A}{1+A^2}\end{cases}$，$C:\begin{cases}x=\frac{2(1-C^2)}{1+C^2}\\ y=\frac{2C}{1+C^2}\end{cases}$，$D:$

$\begin{cases}x=\frac{2(1-D^2)}{1+D^2}\\ y=\frac{2D}{1+D^2}\end{cases}$ (其中 $ABCD$ 均不位于左顶点)

则易证 $AB:\frac{1-AB}{2}x+(A+B)y-(1+AB)=0$ 过 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

$\Rightarrow AB=-2$

同理 $AC:\frac{1-AC}{2}x+(A+C)y-(1+AC)=0$ 与圆 O 相切

$\Rightarrow \frac{|3AC+1|}{\sqrt{(1-AC)^2+4(A+C)^2}}=1$

$\Rightarrow 2A^2C^2=A^2+C^2 \Rightarrow A^2=\frac{C^2}{2C^2-1}$，同理 $B^2=\frac{D^2}{2D^2-1}$

$\Rightarrow A^2B^2=\frac{C^2}{2C^2-1}\cdot\frac{D^2}{2D^2-1}=4$

$\Rightarrow 15C^2D^2+4=8(C^2+D^2)\geqslant 16CD$（令 $CD=t$）

$\Rightarrow t\geqslant\frac{2}{3}$ 或 $t\leqslant\frac{2}{5}$

又 $k_{CD}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-CD}{C+D}$

$\Rightarrow k_{CD}^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{(t-1)^2}{\frac{15t^2+4}{8}+2t}=\frac{2(t+1)^2}{15t^2+16t+4}=\frac{1}{48}$

$\Rightarrow t=2$ 或 $\frac{46}{81}$（舍）

$\Rightarrow \begin{cases} CD=2 \\ C^2+D^2=8 \end{cases} \Rightarrow C+D=\pm 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow CD:-x\pm 4\sqrt{3}y-6=0$

20．解 (1) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\ln(2x\ln x+1)$

$f'(x)=2\cdot\frac{x^3+x^3\ln x-2x\ln x-1}{x^3(2x\ln x+1)}$

令 $g(x)=x^3+x^3\ln x-2x\ln x-1$

$x<1$ 时有 $\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$，$\ln x>\frac{x^2-1}{2x}$

$\Rightarrow g(x)<x^3+\frac{2x^3(x-1)}{x+1}-x^2+1-1<0 \Leftrightarrow x+\frac{2x(x-1)}{x+1}-1<0$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)<0$ 成立

$\Rightarrow f'(x)<0$

同理 $x>1$ 时有 $f'(x)>0$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 递增

(2) 由 $f(1)=1+\ln\frac{1}{a}\geqslant 1$ 可知 $a\in(0,1]$

$a>1$ 时 $f(1)>1$，不成立

$a<0$ 时，显然存在 x_0 使得 $2ax\ln x+\frac{1}{a}\to 0$，此时 $f(x)\to-\infty$，不成立

下证 $a\in(0,1]$ 时原式成立

令 $h(a)=\frac{1}{x^2}+\ln\left(2ax\ln x+\frac{1}{a}\right)$

$h'(a)=\frac{2x\ln x-\frac{1}{a^2}}{2ax\ln x+\frac{1}{a}}$，$a\in(0,1]$

$\Rightarrow$ ① $2x\ln x\leqslant 1$ 时，$h'(a)\leqslant 0$

$\Rightarrow h(a)\geqslant h(1)=\frac{1}{x^2}+\ln(2x\ln x+1)$

由 (1) 知 $\frac{1}{x^2}+\ln(2x\ln x+1)\geqslant 1$

② $2x\ln x>1$ 时

$h(a)\geqslant h\left(\sqrt{\frac{1}{2x\ln x}}\right)=\frac{1}{x^2}+\ln(2\sqrt{2x\ln x})$

令 $F(x)=\frac{1}{x^2}+\ln(2\sqrt{2x\ln x})$

$\Rightarrow F'(x)=\frac{(x^2-4)\ln x+x^2}{2x^3\ln x}$

$x\geqslant 2$ 时 $F'(x)$ 显然大于 0

$x<2$ 时有 $\ln x<\frac{2(x-2)}{x+2}+\ln 2$

$\Rightarrow (x^2-4)\ln x+x^2>2(x-2)^2+\ln 2(x^2-4)+x^2=(3+\ln x)x^2-8x+8-4\ln 2$

$\triangle=16(\ln 2+\ln^2 2-2)<0$

$\Rightarrow (x^2-4)\ln x+x^2>2(x-2)^2+\ln 2(x^2-4)+x^2=(3+\ln x)x^2-8x+8-4\ln 2>0$

$\Rightarrow F'(x)>0$

令 $2t\ln t=1$

下证 $F(t)\geqslant 1$，即 $\frac{1}{t^2}+\ln 2>1\Leftarrow\frac{1}{t^2}+\frac{2}{3}>1\Leftrightarrow t<\sqrt{3}$ 显然成立

故 $F(x)>F(t)>1$

$\Rightarrow$ 当且仅当 $a\in(0,1]$ 时原式成立

21. 解:(1) 分布列如图:

a_5	1	2	3	4	5	8	9
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\Rightarrow E(a_5)=\frac{51}{16}$

(2)

$S_1=1,\ S_2=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

由题意可知: $S_n=\frac{S_{n-2}}{2}+\frac{S_{n-3}}{4}+\cdots+\frac{S_1}{2^{n-2}}+\sum_{i=1}^{n}(4i-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

$=\frac{S_{n-2}}{2}+\frac{S_{n-3}}{4}+\cdots+\frac{S_1}{2^{n-2}}+10-\frac{4n+5}{2^{n-1}}\quad(n\geqslant 3)$

$\Rightarrow S_{n+1}-S_n=\frac{S_{n-1}}{2}-\left(\frac{S_n-10+\frac{4n+5}{2^{n-1}}}{2}\right)+\frac{4n+1}{2^n}\quad(n\geqslant 3)$

$\Rightarrow S_{n+1}=\frac{S_n}{2}+\frac{S_{n-1}}{2}+5-\frac{4}{2^n}\quad(n\geqslant 3)$，又 $S_3=\frac{25}{4}=\frac{1}{2}+\frac{7}{4}+4=\frac{25}{4}$ 成立，故 $n\geqslant 2$

$\Rightarrow 2^{n+1}S_{n+1}=2^nS_n+2\cdot 2^{n-1}S_{n-1}+5\cdot 2^{n+1}-8$

令 $b_n=2^nS_n$ 则 $b_{n+1}=b_n+2b_{n-1}+5\cdot 2^{n+1}-8\quad(n\geqslant 2)$

$\Rightarrow (b_{n+1}+b_n-8)=2(b_n+b_{n-1}-8)+5\cdot 2^{n+1}\quad(n\geqslant 2)$

令 $c_n=b_{n+1}+b_n-8$ 则 $c_n=2c_{n-1}+5\cdot 2^{n+1}\quad(n\geqslant 2)$

$\Rightarrow\frac{c_n}{2^n}=\frac{c_{n-1}}{2^{n-1}}+10,\ \frac{c_1}{2}=\frac{b_2+b_1-8}{2}=4$

$\Rightarrow c_n=(4+10(n-1))\cdot 2^n=(10n-6)\cdot 2^n=b_{n+1}+b_n-8 \quad (n\geqslant 1)$
$\Rightarrow b_{n+1}=-b_n+(10n-6)\cdot 2^n+8$
$\Rightarrow (-1)^{n+1}b_{n+1}=(-1)^n b_n+(-1)^{n+1}\cdot((10n-6)\cdot 2^n+8)$
令 $d_n=(-1)^n b_n$，$d_1=-2$，$d_2=14$
$\Rightarrow d_{n+1}=d_n+(-1)^{n+1}\cdot((10n-6)\cdot 2^n+8)\Rightarrow d_{n+1}=-2-\sum\limits_{i=1}^{n}((-1)^n\cdot((10n-6)\cdot 2^n+8))$
$=\dfrac{2}{9}+\dfrac{(30n-8)\cdot(-2)^{n+1}}{9}+4\cdot(-1)^{n+1}$
$\Rightarrow S_n=\dfrac{2}{9}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{30n-38}{9}+\dfrac{1}{2^{n-2}}$
(经检验，$n=1,2,3,4$ 时均成立)

22 解：(1) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$
由摆线定义可知 $\overset{\frown}{AM}=OA=r\varphi$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=(r\varphi,0)+(0,r)+(-r\sin\varphi,-r\cos\varphi)$
$=(r\varphi-r\sin\varphi,r-r\cos\varphi)$
$\Rightarrow M:\begin{cases}x=r\varphi-r\sin\varphi\\ y=r-r\cos\varphi\end{cases}$ (φ 为参数)
(2) 设两圆相切于 A，$B(r,0)$
则由外摆线定义可知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AM}$
$\Rightarrow \angle BOA=\angle AO'M=\varphi$
过 O' 作 $O'C\parallel x$ 轴 (C 在 O' 右侧)
$\Rightarrow \angle MO'C=\pi-2\varphi$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=(2r\cos\varphi,2r\sin\varphi)+(r\cos(\pi-2\varphi),-r\sin(\pi-2\varphi))$
$=(2r\cos\varphi-r\cos 2\varphi,2r\sin\varphi-r\sin 2\varphi)$
$\Rightarrow M:\begin{cases}x=2r\cos\varphi-r\cos 2\varphi\\ y=2r\sin\varphi-r\sin 2\varphi\end{cases}$ (φ 为参数)

23:解 (1) 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$
则 $a^2b+b^2c+c^2a\leqslant a^2b+2abc<a^2b+2abc+b^2c=b(a+c)^2=\dfrac{1}{2}2b(a+c)^2$
$\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sum a}{3}\right)^3=4$
(2) 原式$=\sum a^2(3-a)\leqslant\dfrac{9}{4}\sum a=\dfrac{27}{4}$ (其中 $x(3-x)\leqslant\dfrac{9}{4}$)
又 $a,b,c\geqslant 0$，无法取等
又显然原式>0
故范围为 $\left(0,\dfrac{27}{4}\right)$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。