姓名__________ 准考证号______________

绝密★启用前

2019年全国高三统一联合考试

理科数学

本试卷4页，23小题，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。

2.全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5 mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。

4.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若集合 $A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{x|x<3\}$　　B.$\{x|0\leqslant x<3\}$　　C.$\{x|0<x<3\}$　　D.$\{x|x\leqslant 4\}$

2.已知 i 为虚数单位，若 a 为实数，且 $a\neq 0$，则 $\frac{1-a\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=$

A.$a+\mathrm{i}$　　B.$a-\mathrm{i}$　　C.i　　D.$-\mathrm{i}$

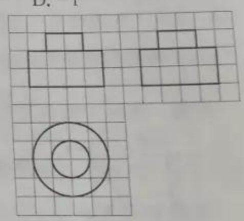
3.如图，网格纸上每个小正方形的边长为10 cm，粗实线画出的是某蛋糕店制作的一款生日蛋糕的三视图，则该蛋糕的体积为

A.$3\pi\times 10^3\ \mathrm{cm}^3$

B.$7\pi\times 10^3\ \mathrm{cm}^3$

C.$9\pi\times 10^3\ \mathrm{cm}^3$

D.$10\pi\times 10^3\ \mathrm{cm}^3$



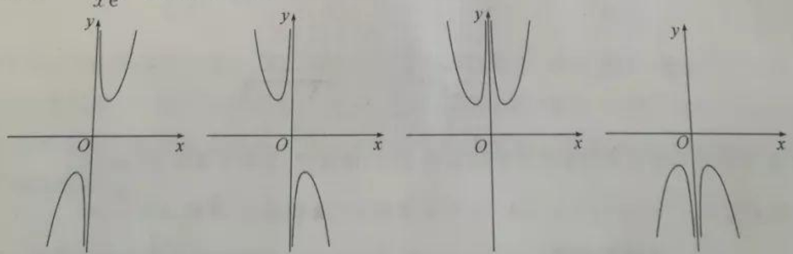
4.已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1$，则 $\tan\alpha=$

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.-2　　D.2

5.在 $\left(x^2-\frac{y}{x}\right)^5$ 的展开式中，xy^3 的系数为

A.20　　B.10　　C.-10　　D.-20

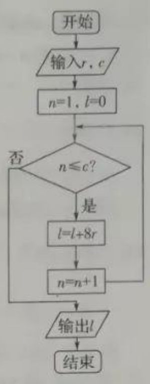
6.函数 $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{xe^x}$ 的图像大致为



A　　B　　C　　D

理科数学试题　第1页(共4页)

7.摆线最早出现于公元 1501 年出版的 C·鲍威尔的一本书中.摆线是这样定义的:一个圆沿一条直线缓慢地滚动,则圆上一固定点所经过的轨迹称为摆线.圆滚动一周,动圆上定点描画出摆线的第一拱;再向前滚动一周,动圆上定点描画出第二拱;继续滚动,可得第三拱、第四拱、……设圆的半径为 r,圆滚动的圈数为 c,摆线的长度为 l,执行如图所示程序框图,若输入的 $r=2$,$c=2$,则输出摆线的长度为



A.12π　　　　B.16π

C.32　　　　D.96

8.在△ABC 中,a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边,$b=2,c=\sqrt{7},C=60°$,则 $\sin A$ 的值为

A.$\frac{\sqrt{7}}{7}$　　　　B.$\frac{\sqrt{21}}{7}$

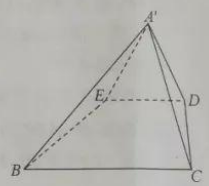
C.$\frac{3\sqrt{7}}{14}$　　　　D.$\frac{3\sqrt{21}}{14}$

9.某车站在某一时刻有 9 位旅客出站,假设每位旅客选择共享单车继续出行的概率都为 $\frac{1}{2}$,且各位旅客之间互不影响.设在这一时刻 9 位旅客中恰好有 k 人骑行共享单车的概率为 $P(X=k)$,则

A.$P(X=4)=P(X=5)$　　　　B.$P(X=4)>P(X=5)$

C.$P(X=5)<P(X=6)$　　　　D.$P(X=5)=P(X=6)$

10.在边长为 8 的等边△ABC 中,D,E 分别为 AC,AB 的中点.现将△ADE 沿 DE 折起到△$A'DE$ 的位置,使得 $A'B=2\sqrt{10}$,则直线 $A'B$ 与底面 $BCDE$ 所成角的正弦值为



A.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　　B.$\frac{\sqrt{30}}{10}$

C.$\frac{\sqrt{70}}{10}$　　　　D.$\frac{\sqrt{21}}{7}$

11.已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,A 为抛物线 C 上异于顶点 O 的一点,点 B 的坐标为(a,b)(其中 a,b 满足 $b^2-4a<0$).当$|AB|+|AF|$最小时,△ABF 恰为正三角形,则 $a=$

A.1　　　　B.$\frac{4}{3}$

C.$\frac{5}{3}$　　　　D.2

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x-2),x>2,\\0,x=2,\\\ln(2-x),x<2,\end{cases}$ 若 $f(x)\leqslant|x-a|$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是

A.$[1,3]$　　　　B.$[2,4]$

C.$[1,2]$　　　　D.$[-1,1]$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,2)$,若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则实数 $\lambda=$________.

14.函数 $f(x)=x^2-\ln|x|$的图像在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为________________.

15.将函数 $f(x)=2\cos^2\ \pi x+\frac{\pi}{3}\ -1$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把所得函数的图像向右平移 1 个单位长度,最后得到的图像对应的函数设为 $g(x)$,则$g(x)$在区间$[-1,1]$上的所有零点的和为________.

16.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A、B(其中点 A 在 x 轴上方)两点,且满足$\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$.若 C 的离心率为$\frac{3}{2}$,直线 l 的倾斜角为 $120°$,则实数 λ 的值是________.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

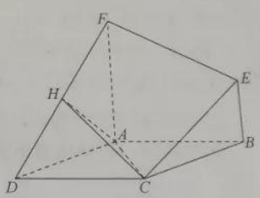
已知等比数列$\{a_n\}$是递减数列,$a_1a_4=3$,$a_2+a_3=4$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=2^{n-2}a_{n+1}+n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

如图,在多面体 $ABCDFE$ 中,四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle ABC=60°$,四边形 $ABEF$ 是直角梯形,$\angle FAB=90°$,$AF\parallel BE$,$AF=AB=2BE=2$.



(1)证明:$CE\parallel$平面 ADF.

(2)若平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$,H 为 DF 的中点,求平面 ACH 与平面 $ABEF$ 所成锐二面角的余弦值.

19.(12 分)

为了解高三学生的"理科综合"成绩是否与性别有关,某校课外学习兴趣小组在本地区高三年级理科班中随机抽取男、女学生各 100 名,然后对这 200 名学生在一次联合模拟考试中的"理科综合"成绩进行统计.规定:分数不小于 240 分为"优秀",小于 240 分为"非优秀".

(1)根据题意,填写下面的 2×2 列联表,并根据列联表判断是否有 90%以上的把握认为"理科综合"成绩是否优秀与性别有关.

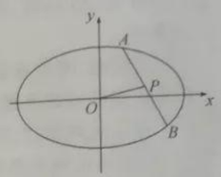
性别	优秀	非优秀	总计
男生	35		
女生		75	
总计			

(2)用分层抽样的方法从成绩优秀的学生中随机抽取 12 名学生,然后再从这 12 名学生中抽取 3 名参加某高校举办的自主招生考试,设抽到的 3 名学生中女生的人数为 X,求 X 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（12 分）



在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，直线 l 和椭圆 C 交于 A，B 两点，当直线 l 过椭圆 C 的焦点，且与 x 轴垂直时，$|AB|=\dfrac{2}{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设直线 l 过点(1,0)且倾斜角为钝角，P 为弦 AB 的中点，当 $\angle OPB$ 最大时，求直线 l 的方程.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}-1$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a>\dfrac{1}{3}e$ 时，求证：$f(x)>\ln x$.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22,23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分，作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号的方框涂黑.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

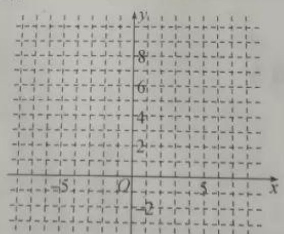
在平面直角坐标系 xOy 中，已知倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），点 P 的坐标为$(-2,0)$.

(1)当 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ 时，设直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值；

(2)若点 Q 在曲线 C 上运动，点 M 在线段 PQ 上运动，且 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，求动点 M 的轨迹方程.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-1|+|2x|$.



(1)在给出的平面直角坐标系中作出函数 $f(x)$ 的图像，并解不等式 $f(x)\geqslant 2$；

(2)若不等式 $f(x)+|x-1|\leqslant k-1$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求证：$k+\dfrac{6}{k}\geqslant 5$.

2019 年全国高三统一联合考试·理科数学

一、选择题

1.B 【解析】因为 $A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<3\}$.故选 B.

2.D 【解析】$\frac{1-a\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\frac{(1-a\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\frac{-(a^2+1)\mathrm{i}}{a^2+1}=-\mathrm{i}$，故选 D.

3.C 【解析】该蛋糕是由上下两个圆柱形小蛋糕组合而成，其体积为$V=\pi\times 20^2\times 20+\pi\times 10^2\times 10=9\pi\times 10^3(\mathrm{cm}^3)$.故选 C.

4.B 【解析】由 $\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1$，得 $2\cos^2\alpha=2\sin 2\alpha$，即 $\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha\neq 0$，从而 $2\sin\alpha=\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.故选 B.

5.C 【解析】因为 $\left(x^2-\frac{y}{x}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{y}{x}\right)^r=(-1)^rC_5^rx^{10-3r}y^r$，所以当 $r=3$ 时，xy^3 的系数为$(-1)^3C_5^3=-10$.故选 C.

6.A 【解析】由 $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{xe^x}=\frac{1}{x}(e^x+e^{-x})$为奇函数，可排除 C 和 D；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，可排除 B.故选 A.

7.C 【解析】$l=0+8\times 2=16$，$n=2$，适合 $n\leqslant 2$；$l=16+8\times 2=32$，$n=3$，不适合 $n\leqslant 2$，此时输出 $l=32$.故选 C.

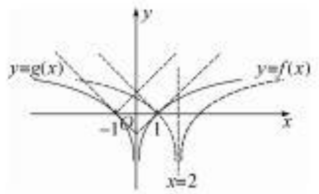
8.D 【解析】由余弦定理，得 $7=a^2+4-2a$，即 $a=3$，利用正弦定理可得 $\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.故选 D.

9.A 【解析】由题意得 $P(X=4)=C_9^4\left(\frac{1}{2}\right)^9$，$P(X=5)=C_9^5\left(\frac{1}{2}\right)^9$，$P(X=6)=C_9^6\left(\frac{1}{2}\right)^9$，因为 $C_9^4=C_9^5$，所以 $P(X=4)=P(X=5)$，因为 $C_9^5>C_9^6$，所以 $P(X=5)>P(X=6)$.故选 A.

10.B 【解析】取 DE 的中点 O，连接 OA'，OB.在$\triangle A'DE$ 中，由 $A'D=A'E=DE=4$ 可得 $OA'=2\sqrt{3}$.在$\triangle BOE$ 中，由 $OE=2$，$BE=4$，$\angle BEO=120^\circ$可得 $OB=2\sqrt{7}$，由 $OA'^2+OB^2=A'B^2$ 可得 $OA'\perp OB$.又因为 $OA'\perp DE$，$OB\cap DE=O$，所以 $OA'\perp$底面 $BCDE$，$\angle A'BO$ 即为直线 $A'B$ 与底面 $BCDE$ 所成角.在 $\mathrm{Rt}\triangle A'OB$ 中，$\sin\angle A'BO=\frac{OA'}{A'B}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.故选 B.

11.C 【解析】设 C 的准线为 l，过点 B 作 $BD\perp l$，D 为垂足.当且仅当 $AB\perp l$，即点 B，A，D 共线时，$|AB|+|AF|$最小，此时点 D 的坐标为$(-1,b)$.考虑到$\triangle ABF$ 为正三角形和抛物线的定义，则有$|AB|=|AF|=|AD|$，从而点 A 的坐标为$\left(\frac{a-1}{2},b\right)$.因此，$\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+a\right)=1$，解得 $a=\frac{5}{3}$.故选 C.

12.A 【解析】将函数$f(x)$的图像向左平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\0,x=0,\\\ln(-x),x<0\end{cases}$ 的图像.画出函数$f(x)$，$g(x)$的图像如图所示.注意到直线 $y=x-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 切于点$(1,0)$，且直线 $y=x-1$ 在曲线 $y=\ln x$ 的上方.根据对称性，直线 $y=-x-1$ 与曲线 $y=\ln(-x)$切于点$(-1,0)$，且直线 $y=-x-1$ 在曲线 $y=\ln(-x)$的上方.而曲线 $y=|x+2-a|=|x-(a-2)|$的最低点的坐标为$(a-2,0)$，故若满足 $f(x)\leqslant|x-a|$，即$g(x)\leqslant|x+2-a|$对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则$-1\leqslant a-2\leqslant 1$，即 $1\leqslant a\leqslant 3$.故选 A.



二、填空题

13.$\frac{5}{4}$ 【解析】由题得 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(3\lambda-2,2\lambda+1)$，由$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得$-2(3\lambda-2)+(2\lambda+1)=0$，解得 $\lambda=\frac{5}{4}$.

14. $x+y=0$ 【解析】因为当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\ln x$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=1$. 因为函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-1)=-1$. 又 $f(-1)=1$，所以函数 $f(x)$ 的图像在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y-1=-(x+1)$，即 $x+y=0$.

15. $\frac{2}{3}$ 【解析】由题意知 $g(x)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$，令 $\pi x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=k+\frac{5}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得零点为 $x=\frac{5}{6}$ 和 $x=-\frac{1}{6}$，故所求零点的和为 $\frac{2}{3}$.

16. $\frac{1}{7}$ 【解析】由 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}<(\sqrt{3})^2$，得直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点，设 $|F_2B|=k$，则 $|AF_2|=\lambda k$，根据双曲线定义，$|F_1B|=2a+k$，$|AF_1|=2a+\lambda k$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(2a+\lambda k)^2=(2c)^2+(\lambda k)^2-2\cdot 2c\lambda k\cos 60^\circ$①；在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(2a+k)^2=(2c)^2+k^2-2\cdot 2ck\cos 120^\circ$②. ①−②并整理，得 $\lambda=\frac{2a-c}{2a+c}=\frac{2-\frac{c}{a}}{2+\frac{c}{a}}=\frac{2-\frac{3}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{1}{7}$.

三、解答题

17. 解：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $\begin{cases}a_1^2q^3=3,\\ a_1q+a_1q^2=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{3},\\ q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ q=\frac{1}{3}.\end{cases}$ …………………………… 4分

又因为数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，所以 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{3},\\ q=3\end{cases}$ 不合题意，

故 $\begin{cases}a_1=9,\\ q=\frac{1}{3}.\end{cases}$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{3-n}$. ……………… 6分

(2) 由(1)得 $b_n=2^{n-2}\times 3^{2-n}+n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+n$，

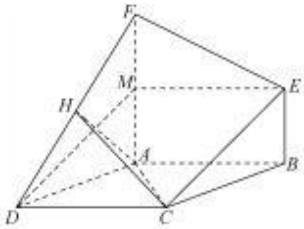
……………………………………………………………… 8分

故 $T_n=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n+n^2}{2}$. …………………………………… 12分

18. (1) 证明：（方法一）因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD\parallel BC$. 又因为 $AF\parallel BE$，$AF\cap AD=A$，$BC\cap BE=B$，所以平面 $ADF\parallel$ 平面 BCE. ………………… 2分

因为 $CE\subset$ 平面 BCE，所以 $CE\parallel$ 平面 ADF. …… 4分

（方法二）取 AF 的中点 M，连接 DM，EM，如图.



由题意知 $AM=BE$ 且 $AM\parallel BE$，所以四边形 $ABEM$ 为平行四边形，即 $ME=AB$ 且 $ME\parallel AB$. ……… 2分

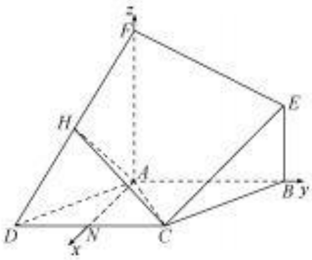
又因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以四边形 $DCEM$ 为平行四边形，即有 $DM\parallel CE$.

又 $DM\subset$ 平面 ADF，$CE\not\subset$ 平面 ADF，所以 $CE\parallel$ 平面 ADF. …………………………………………………… 4分

(2) 解：取 CD 的中点 N，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，可得 $AN\perp CD$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$AF\subset$ 平面 $ABEF$，$AF\perp AB$，所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$.

以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$ 如图所示. ………………………………………… 6分



故 $A(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$F(0,0,2)$，$H\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$.

设平面 ACH 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y+z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$$

令 $x=1$ 可得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$. ………………9分

易知平面 $ABEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

………………………………10分

设平面 ACH 与平面 $ABEF$ 所成的锐二面角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

即所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………12分

19.解：(1)填写列联表如下：

性别	优秀	非优秀	总计
男生	35	65	100
女生	25	75	100
总计	60	140	200

………………………………2分

因为 $K^2=\dfrac{200\times(35\times75-65\times25)^2}{100\times100\times60\times140}\approx2.381<2.706$，

………………………………4分

所以没有 90% 以上的把握认为"理科综合"成绩是否优秀与性别有关. ………………5分

(2)利用分层抽样的方法，抽到男生的人数为 $35\times\frac{12}{60}=7$，抽到女生的人数为 $25\times\frac{12}{60}=5$.

若从 12 人中任意抽取 3 人，则女生被抽到的人数 $X=0,1,2,3$，$P(X=0)=\dfrac{C_7^3C_5^0}{C_{12}^3}=\dfrac{7}{44}$，$P(X=1)=\dfrac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\dfrac{21}{44}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_7^1C_5^2}{C_{12}^3}=\dfrac{7}{22}$，$P(X=3)=\dfrac{C_7^0C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$.

………………………………9分

故抽到女生的人数 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

$E(X)=0\times\frac{7}{44}+1\times\frac{21}{44}+2\times\frac{7}{22}+3\times\frac{1}{22}=\frac{5}{4}$.

………………………………12分

20.解：(1)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{1}{9}$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b^2=1$，$a^2=9$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………4分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l：$y=k(x-1)(k<0)$.

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得 $(9k^2+1)x^2-18k^2x+9k^2-9=0$.

故 $x_1+x_2=\dfrac{18k^2}{9k^2+1}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{9k^2}{9k^2+1}$，$y_0=k(x_0-1)=k\left(\dfrac{9k^2}{9k^2+1}-1\right)=-\dfrac{k}{9k^2+1}$.

所以直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{9k}$. …………8分

设直线 l，OP 的倾斜角分别为 α，β，则 $\angle OPB=\alpha-\beta$，

$\tan\angle OPB=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{9}{8}\left(k+\dfrac{1}{9k}\right)$.

………………………………9分

因为 $k<0$，所以 $-\left(k+\dfrac{1}{9k}\right)=(-k)+\dfrac{1}{-9k}\geqslant2\sqrt{(-k)\cdot\dfrac{1}{-9k}}=\dfrac{2}{3}$，即 $k+\dfrac{1}{9k}\leqslant-\dfrac{2}{3}$，所以 $\tan\angle OPB\leqslant-\dfrac{3}{4}$，当且仅当 $k=-\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立.

所以当 $\angle OPB$ 最大时，直线 l 的斜率 $k=-\frac{1}{3}$，此时直线 l 的方程为 $x+3y-1=0$. ………………12分

21.(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**.

$f'(x)=2xe^{ax}+x^2\cdot ae^{ax}=x(ax+2)e^{ax}$，………1分

当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2-1$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数，在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数；…………2分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$，令 $f'(x)>0$ 得 $x<-\frac{2}{a}$ 或 $x>0$，令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{2}{a}<x<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$ 内为增函数，在区间 $\left(-\frac{2}{a},0\right)$ 内为减函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数；

………………………………4分

当 $a<0$ 时，$f'(x)=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<-\frac{2}{a}$，令 $f'(x)<0$ 得 $x>-\frac{2}{a}$ 或 $x<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，在区间 $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$ 内为增函数，在区间 $\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$ 内为减函数. …… 6 分

(2)**证明**：由 $f(x)>\ln x$，得 $x^2e^{ax}>\ln x+1$，即 $\frac{e^{ax}}{x}>\frac{\ln x+1}{x^3}$.

设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x^3}$，

则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(\ln x+1)\cdot 3x^2}{x^6}$

$=-\frac{3\ln x+2}{x^4}=-\frac{3(\ln x-\ln e^{-\frac{2}{3}})}{x^4}$.

当 $0<x<e^{-\frac{2}{3}}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>e^{-\frac{2}{3}}$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{2}{3}})$ 内是增函数，在区间 $(e^{-\frac{2}{3}},+\infty)$ 内是减函数，

所以 $x=e^{-\frac{2}{3}}$ 是 $g(x)$ 的极大值点，也是 $g(x)$ 的最大值点，

即 $g(x)_{max}=g(e^{-\frac{2}{3}})=\frac{\ln e^{-\frac{2}{3}}+1}{(e^{-\frac{2}{3}})^3}=\frac{1}{3}e^2$. ……… 9 分

设 $h(x)=\frac{e^{ax}}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)e^{ax}}{x^2}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内是减函数，在区间 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内是增函数，

所以 $x=\frac{1}{a}$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是 $h(x)$ 的最小值点，

即 $h(x)_{min}=h\left(\frac{1}{a}\right)=ae$.

综上，$g(x)\leqslant\frac{1}{3}e^2<ae\leqslant h(x)$，

故 $f(x)>\ln x$ 成立. ……………………………… 12 分

22.**解**：(1)曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1$.

当 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{12}{13}t,\\ y=\frac{5}{13}t\end{cases}$

(t 为参数)，代入曲线 C 的普通方程，得 $t^2-\frac{48}{13}t+3=0$.

由于 $\Delta=\left(-\frac{48}{13}\right)^2-12=\frac{276}{169}>0$，故可设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1\cdot t_2=3$.

所以 $|PA|\cdot|PB|=3$. ……………………………… 5 分

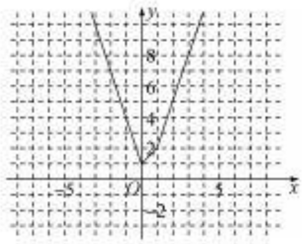
(2)设 $Q(\cos\theta,\sin\theta)$，$M(x,y)$，则由 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，得 $(x+2,y)=2(\cos\theta-x,\sin\theta-y)$，

即 $\begin{cases}3x+2=2\cos\theta,\\ 3y=2\sin\theta.\end{cases}$

消去 θ，得 $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$，

此即为点 M 的轨迹方程. ……………………………… 10 分

23.(1)**解**：$f(x)=|x-1|+|2x|=\begin{cases}1-3x,x<0,\\ x+1,0\leqslant x\leqslant1,\\ 3x-1,x>1,\end{cases}$ 其图像如下图所示.



……………………………………………………… 3 分

令 $f(x)=2$，得 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$.

由 $f(x)$ 的图像可知，不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{3}，或 x\geqslant1\right\}$. ……………………………… 5 分

(2)**证明**：因为 $f(x)+|x-1|=|2x-2|+|2x|\geqslant|2x-2-2x|=2$，

所以 $k\geqslant3$. ……………………………………………… 7 分

因为 $k+\frac{6}{k}-5=\frac{k^2-5k+6}{k}=\frac{(k-2)(k-3)}{k}$，

又由 $k\geqslant3$，得 $k-2>0$，$k-3\geqslant0$，所以 $\frac{(k-2)(k-3)}{k}\geqslant0$，

即 $k+\frac{6}{k}\geqslant5$. ……………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需获取更多试题及资料，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注