

秘密★启用前

文科数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并交回.满分150分,考试用时120分钟.

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) | y = 2\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 命题“若 $x^2 < 4$, 则 $-2 < x < 2$ ”的逆否命题是

- A. 若 $-2 < x < 2$, 则 $x^2 < 4$
 B. 若 $x^2 \geq 4$, 则 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$
 C. 若 $-2 < x < 2$, 则 $x^2 \geq 4$
 D. 若 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$, 则 $x^2 \geq 4$

3. 如图1是某赛季两位篮球运动员最近10场比赛中各自得分的茎叶图,两人的平均得分分别为 $\bar{X}_甲$ 、 $\bar{X}_乙$, 则下列结论正确的是



- A. $\bar{X}_甲 < \bar{X}_乙$, 甲比乙稳定
 B. $\bar{X}_甲 < \bar{X}_乙$, 乙比甲稳定
 C. $\bar{X}_甲 > \bar{X}_乙$, 甲比乙稳定
 D. $\bar{X}_甲 > \bar{X}_乙$, 乙比甲稳定

4. 下列函数为奇函数的是

- A. $f(x) = xe^{-x}$ B. $f(x) = \sqrt{x^3}$
 C. $f(x) = x^2 \sin x$ D. $f(x) = \ln|x|$

5. 深秋时节,霜叶红满地.今要测量捡到的枫叶的面积,在边长为15cm的正方形纸片中描出枫叶的轮廓,然后随机撒入100粒豆子,恰有60粒落入枫叶轮廓中,则枫叶的面积近似为

- A. 120cm^2 B. 135cm^2
 C. 150cm^2 D. 165cm^2

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1024$, 点 (n, a_n) 在函数 $y = a\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象上. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则

- $S_{10} - S_8 =$
 A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

7. 在复平面内, 点 $A(\cos\theta, \sin\theta)$, $B(\sin(-\theta), \cos(-\theta))$ 分别对应复数 z_1, z_2 , 则 $\frac{z_2}{z_1} =$

- A. -1
B. 1
C. -i
D. i

8. 半径为 4 的圆 C 与直线 $l_1: 3x+4y-10=0$, $l_2: 3x+4y+15=0$ 分别相交于点 A 和点 B 、点 C 和点 D , 若 $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 $|CD|=$

- A. $2\sqrt{7}$
B. 5
C. $2\sqrt{5}$
D. 4

9. 函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $[0, 8\pi]$ 上的所有零点之和为

- A. 45π
B. 40π
C. 35π
D. 30π

10. 如图 2, 将长和宽之比为 2:1 的长方形纸片 ADD_1A_1 (图甲) 折成一个正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ (图乙) 的侧面,

则平面 PA_1Q 与 AB_1Q 所成角的余弦值为

- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{7}$

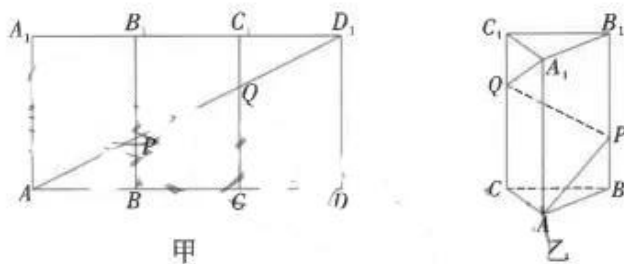


图 2

11. 已知 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 4)$ 的左、右顶点, P, Q 是椭圆上关于 x 轴对称的不同两点, 设

直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = \frac{3}{4}$, 则椭圆的短轴长为

- A. $4\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{2}$
C. $4\sqrt{3}$
D. $2\sqrt{3}$

12. 三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC=4$, $AB=\sqrt{10}$, $AC=3\sqrt{2}$, $BC=2$, 则球 O 的表面积为

- A. 24π
B. 28π
C. 36π
D. 40π

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 某校高三年级有 900 名学生, 其中文科学生 270 名. 按文理科比例用分层抽样的方法, 从该年级学生中抽取一个样本容量为 30 的样本, 则应抽取理科学生人数为 _____.

14. 已知 \vec{a}, \vec{b} 为单位向量, 且 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 $-\frac{1}{2}$, 则 $|\vec{a}+2\vec{b}| =$ _____.

15. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左右焦点, 直线 $l: y = \sqrt{3}x$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = |F_1F_2|$, 则双曲线 C 的离心率为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1}$, 下面四个结论: ① $f(x)$ 的图象是轴对称图形; ② $f(x)$ 的图象是中心对称图形;

③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调; ④ $f(x)$ 的最大值为 1. 其中正确的有 _____.

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

新冠肺炎疫情对人类生产生活产生了巨大影响, 科学家正在研发新的治疗药物. 新的治疗药物通常需要进行有效性试验. 为了研究一种新药对治疗某疾病是否有效, 进行了临床试验. 采用简单随机抽样方法抽取 100 人, 情况如下表:

疗法	疗效	
	痊愈	未痊愈
服用新药	48	10
服用安慰剂	30	20

(1) 能否有 99% 的把握认为新药治疗该疾病有明显的效果?

(2) 小明和其余 4 名同伴参与了该项研究, 研究人员决定从他们 5 人中随机邀请 2 人进行试验回访, 求 3 人中小明和其中一位同伴小亮同时被邀请访谈的概率.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (本小题满分 12 分)

如图 3, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC=3$, $AA_1=2BC=8$, D, E 分别是 B_1C_1, AA_1 的中点, F 是棱 BB_1 上的点, 满足 $CF=CE$, M 是 C_1D 的中点.

(1) 证明: $A_1M \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求三棱锥 $C-DEF$ 的体积.

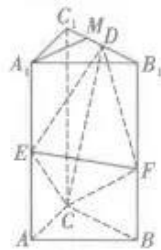


图 3

19. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a=2\sqrt{3}$, $2b\cos A = a\cos C + c\cos A$.

(1) 求 A ;

(2) 从两个条件: ① $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos B$; ② $b = \frac{1}{2}c$ 中任选一个作为已知条件, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 焦点为 F , 点 P 是 C 上任一点 (除去原点 O), 过点 P 作 C 的切线 l 交准线于点 Q .

(1) 当点 P 为 $(2, 1)$ 时, 求抛物线 C 在点 P 处的切线方程及 $\triangle PQF$ 的外接圆方程;

(2) 若点 P 在第一象限, 点 R 在准线上且位于点 Q 右侧, 证明: $\angle FQR = 2\angle PQR$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $-\frac{3}{2}a$, 求 a .

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目的题号涂黑, 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = e^t + e^{-t}, \\ y = e^t - e^{-t}, \end{cases}$ (t 为参数), 在以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho(3\sin\theta - 5\cos\theta) = 26$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 求曲线 C 上的点到直线 l 距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = \left| x + \frac{1}{2} \right| - |x - a|$.

(1) 若不等式 $f(x) + 1 \leq 0$ 有解, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 记 $f(x)$ 的最大值为 M . 若 $m+n=M$, $m, n, p, q > 0$, 证明: $m\sqrt{p} + n\sqrt{q} \leq \sqrt{mp+nq}$.

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	C	B	A	D	A	D	B	C	C

【解析】

- 因为直线 $y=2$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，所以 $A \cap B$ 的元素的个数是 1，故选 C.
- 原命题的条件是“若 $x^2 < 4$ ”，结论为“ $-2 < x < 2$ ”，则其逆否命题是：若 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$ ，则 $x^2 \geq 4$ ，故选 D.
- 根据茎叶图可知，甲运动员的平均成绩低于乙运动员的平均成绩，甲的成绩比乙的成绩更集中，因此甲比乙稳定，故选 A.
- A 选项， $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(-x) = -xe^x$ ， $-f(x) = -xe^{-x}$ ，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数；B 选项， $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，不关于原点对称，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数；C 选项， $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(-x) = -x^2 \sin x$ ， $-f(x) = -x^2 \sin x$ ，故 $f(x)$ 为奇函数；D 选项， $f(x)$ 的定义域为 $(-x, 0) \cup (0, +x)$ ， $f(-x) = \ln|x|$ ， $f(x) = \ln|x|$ ，故 $f(x)$ 为偶函数，故选 C.
- 由题可知，落入枫叶轮廓中的概率为 $P = \frac{S_{\text{枫叶}}}{S_{\text{正方形}}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ ，所以枫叶的面积近似为 $S_{\text{枫叶}} = P \cdot S_{\text{正方形}} = \frac{3}{5} \times 15^2 = 135 \text{cm}^2$ ，故选 B.
- 由题得 $a_1 = 1024 = \frac{1}{2}a$ ，解得 $a = 2^{11}$ ，故 $a_n = 2^{11-n}$ ，所以 $S_{10} - S_8 = a_9 + a_{10} = 2^2 + 2^1 = 6$ ，故选 A.
- 由题可知 $z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ ， $z_2 = \sin(-\theta) + i \cos(-\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta$ ，所以 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-\sin \theta + i \cos \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{(-\sin \theta + i \cos \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)i}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = i$ ，故选 D.
- 由题得直线 l_1 与直线 l_2 之间的距离为 $d = \frac{25}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$ ，所以圆心 C 在两直线之间. 圆心 C 到直线 l_1 的距离为 $d_1 = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ ，则圆心 C 到直线 l_2 的距离为 $d_2 = 5 - 2 = 3$ ，故

$|CD| = 2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$, 故选 A.

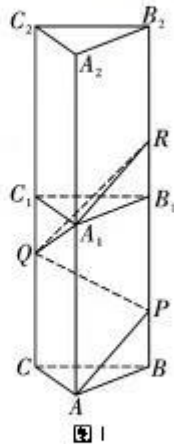
9. 由 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$ 得 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{N}$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 8\pi]$ 上的零点从小到大排成首项为 $\frac{\pi}{4}$ 、公差

为 π 的等差数列. 由 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 8\pi$ 得 $0 \leq k \leq 7$, 即该数列共有 8 项, 所以所有零点之和

为 $8 \times \frac{\pi}{4} + \frac{8 \times 7}{2} \times \pi = 30\pi$, 故选 D.

10. 设 $AD = 6$, 则 $AA_1 = 3, AB = BC = CA = 2$. 如图 1, 通过补体将直线 AP 平移至 A_1R , 则异面直线 AP 与 A_1Q 所成角等于 A_1R 与 A_1Q 所成角. 由图得 $A_1Q = A_1R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, QR = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 则

$$\cos \angle QA_1R = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \text{ 故选 B.}$$



11. 根据椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 知 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $Q(x_0, -y_0)$. 且

$$\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, k_1 = \frac{y_0}{x_0 + 4}, k_2 = \frac{-y_0}{x_0 - 4}, \text{ 所以 } k_1 k_2 = \frac{-y_0^2}{x_0^2 - 16} = \frac{b^2}{16} = \frac{3}{4}. \text{ 解得 } b = 2\sqrt{3}, \text{ 即椭}$$

圆的短轴长为 $2b = 4\sqrt{3}$, 故选 C.

12. 由余弦定理可得 $\cos \angle BAC = \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{5}}$. 设 $\triangle ABC$ 的外

接圆半径为 r , 由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2r$, 故 $r = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \sqrt{5}$, 所以球 O 的半

径为 $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 3$, 球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 36\pi$, 故选 C.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	21	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} + 1$	①③④

【解析】

13. 设应抽取理科学生人数为 x , 则 $\frac{x}{900 - 270} = \frac{30}{900}$, 解得 $x = 21$. 故答案为: 21.

14. 由题得 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 所以

$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 4 = 3$, 即 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}$. 故答案为: $\sqrt{3}$.

15. 不妨设 A, B 分别在第一、第三象限, 则 $\angle AOF_2 = 60^\circ$. 由 $|AB| = |F_1F_2| = 2c$ 得 $|OA| = |OF_2|$, 且四边形 AF_1BF_2 为矩形. 故 $\triangle AOF_2$ 是正三角形, $|AF_2| = c$, $|AF_1| = \sqrt{3}c$. 由双曲线的定义知 $\sqrt{3}c - c = 2a$, 从而 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} + 1$, 故答案为: $\sqrt{3} + 1$.

16. $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 由于 $f(-x) = \frac{\cos(-\pi x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故①正确; 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $y = \cos \pi x$ 单调递减且函数值为正数, $y = x^2 + 1$ 单调递增且函数值为正数, 故 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1}$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 故③正确; 由于 $\cos \pi x \leq 1, x^2 + 1 \geq 1$, 所以 $f(x) \leq 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故④正确; 由④知, 当且仅当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的函数值为 1, 故 $f(x)$ 不可能是周期函数, 从而 $f(x)$ 的图象不可能是中心对称图形, 故②错误. 故答案为: ①③④.

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

解: (1) 根据表中数据可得 $K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{70 \times 30 \times 50 \times 50} = \frac{100}{21} \approx 4.762 < 6.635$,

所以没有 99% 的把握认为新药治疗该疾病有明显的效果. (4 分)

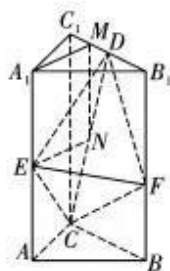
(2) 记小明、小亮和其余 3 人分别为 1, 2, a, b, c , Ω 为“从 5 人中随机邀请 3 人”, A 为“小明和其中一位同伴小亮同时被邀请”, 则 $\Omega = \{(1, 2, a), (1, 2, b), (1, 2, c), (1, a, b), (1, a, c), (1, b, c), (2, a, b), (2, a, c), (2, b, c), (a, b, c)\}$,

$A = \{(1, 2, a), (1, 2, b), (1, 2, c)\}$, 故 $P(A) = \frac{3}{10}$ (12 分)

18. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 如图 2, 取 CD 的中点 N , 连接 MN, EN .

$\because M, N$ 分别是 C_1D, CD 的中点,



文科数学参考答案 · 第 3 页 (共 8 页)

$\therefore MN \parallel CC_1$ 且 $MN = \frac{1}{2}CC_1$.

图 2

又 $\because E$ 是 AA_1 的中点,

$\therefore A_1E \parallel CC_1$ 且 $A_1E = \frac{1}{2}CC_1$.

$\therefore A_1E \parallel MN$ 且 $A_1E = MN$.

\therefore 四边形 A_1ENM 是平行四边形.

$\therefore A_1M \parallel EN$.

又 $\because A_1M \not\subset$ 平面 CDE , $EN \subset$ 平面 CDE ,

$\therefore A_1M \parallel$ 平面 CDE (6分)

(2) 解: 由题可得

$$S_{\triangle CDE} = S_{\text{梯形}BCED} - S_{\triangle BCF} - S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 13.$$

点 E 到平面 CDF 的距离 $d = AC = 3$.

所以 $V_{E-CDF} = \frac{1}{3} S_{\triangle CDF} \cdot d = \frac{1}{3} \times 13 \times 3 = 13$ (12分)

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由正弦定理得 $2 \sin B \cos A = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

所以 $2 \sin B \cos A = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A+C) = \sin(\pi-B) = \sin B$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ (6分)

(2) 若选择①, 将 $a = 2\sqrt{3}$, $b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos B$ 代入 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} \cos B}{\sin B}$,

即 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$, $b = 2$, $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$.

若选择②, 将 $a = 2\sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2}c$ 代入 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$ 得 $c^2 = 16$,

解得 $c = 4$ ($c = -4$ 舍去), 所以 $b = 2$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (12分)

20. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 由 $x^2 = 4y$ 得 $y = \frac{1}{4}x^2$, $y' = \frac{1}{2}x$, 则切线斜率为 $k = 1$,

故切线方程为 $y - 1 = x - 2$, 即 $y = x - 1$ (2分)

令 $y = -1$ 得 $x = 0$, 即 $Q(0, -1)$.

所以 $\angle PFQ = \frac{\pi}{2}$, $\triangle PQF$ 的外接圆圆心为 PQ 的中点 $(1, 0)$, 半径 $r = \frac{|PQ|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 $\triangle PQF$ 的外接圆方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ (6分)

(2) 证明: 设 $P(x_0, \frac{x_0^2}{4})$ ($x_0 > 0$), 由 (1) 得切线斜率为 $k = \frac{1}{2}x_0$.

所以 $\tan \angle PQR = \frac{1}{2}x_0$, 且切线为 $y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$, 即 $2x_0x - 4y - x_0^2 = 0$.

令 $y = -1$ 得 $x = \frac{x_0}{2} - \frac{2}{x_0}$, 即 $Q(\frac{x_0}{2} - \frac{2}{x_0}, -1)$.

① 当 $x_0 = 2$ 时, $\tan \angle PQR = 1$, $\angle PQR = \frac{\pi}{4}$;

$Q(0, -1)$, $\angle FQR = \frac{\pi}{2}$, 满足 $\angle FQR = 2\angle PQR$.

② 当 $x_0 \neq 2$ 时, $\tan \angle FQR = k_{FQ} = \frac{1 - (-1)}{0 - (\frac{x_0}{2} - \frac{2}{x_0})} = \frac{4x_0}{4 - x_0^2}$,

$$\tan 2\angle PQR = \frac{2 \tan \angle PQR}{1 - \tan^2 \angle PQR} = \frac{2 \times \frac{1}{2} x_0}{1 - \left(\frac{x_0}{2}\right)^2} = \frac{4x_0}{4 - x_0^2},$$

所以 $\tan \angle FQR = \tan 2\angle PQR$.

因为 P 在第一象限, 所以 $\angle FQR, 2\angle PQR \in (0, \pi)$, 故 $\angle FQR = 2\angle PQR$.

综上, $\angle FQR = 2\angle PQR$ (12分)

(注: 其他证法酌情给分, 如证明 $PF \perp QF$.)

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = (x-1)e^x$, $f'(x) = xe^x$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值 $f(0) = -1$, 无极大值. (4分)

(2) 由题得 $f'(x) = xe^x - a$, $x \in [0, +\infty)$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $xe^x > 0$, $-a \geq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min} = f(0) = -1 = -\frac{3}{2}a$, 解得 $a = \frac{2}{3}$ (舍去).

② 当 $a > 0$ 时, $f'(0) = -a < 0$, $f'(a) = a(e^a - 1) > 0$, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一零点 $x_0 \in (0, a)$, 且 $a = x_0 e^{x_0}$.

当 $x \in [0, x_0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\min} = f(x_0) = (x_0 - 1)e^{x_0} - ax_0 = (x_0 - 1)\frac{a}{x_0} - ax_0 = a\left(1 - x_0 - \frac{1}{x_0}\right) = -\frac{3}{2}a$,

即 $1 - x_0 - \frac{1}{x_0} = -\frac{3}{2}$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 或 $x_0 = 2$, $a = 2e^2$.

综上, a 的值为 $\frac{\sqrt{e}}{2}$ 或 $2e^2$ (12分)

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

解: (1) 由 $\begin{cases} x = e^t + e^{-t}, \\ y = e^t - e^{-t}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2, \\ y^2 = e^{2t} + e^{-2t} - 2, \end{cases}$ 消去参数 t 得 $x^2 - y^2 = 4$,

又 $x = e^t + e^{-t} \geq 2$, 所以曲线 C 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4(x \geq 2)$.

由 $\rho(3\sin\theta - 5\cos\theta) = 26$ 得 $5\rho\cos\theta - 3\rho\sin\theta + 26 = 0$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $5x - 3y + 26 = 0$ (5分)

(2) 设点 P 的坐标为 $(e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$, 则点 P 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|5(e^t + e^{-t}) - 3(e^t - e^{-t}) + 26|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{2e^t + 8e^{-t} + 26}{\sqrt{34}} \geq \frac{2\sqrt{2e^t \cdot 8e^{-t}} + 26}{\sqrt{34}} = \sqrt{34},$$

当 $2e^t = 8e^{-t}$, 即 $e^t = 2$, $t = \ln 2$, 可以取到上述 “=”, 此时点 P 为 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

所以曲线 C 上的点到直线 l 距离的最小值为 $\sqrt{34}$ (10分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

(1) 解: 由绝对值不等式 $\|x_1| - |x_2| \leq |x_1 - x_2|$ 得 $-|x_1 - x_2| \leq |x_1| - |x_2| \leq |x_1 - x_2|$,

$$\text{故 } f(x) = \left| x + \frac{1}{2} \right| - |x - a| \geq - \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) - (x - a) \right| = - \left| a + \frac{1}{2} \right|.$$

当且仅当 $\left(x + \frac{1}{2} \right) \left(a + \frac{1}{2} \right) \leq 0$ 时取 “=”.

所以不等式 $f(x) + 1 \leq 0$ 有解的充要条件是 $1 - \left| a + \frac{1}{2} \right| \leq 0$, 解得 $a \leq -\frac{3}{2}$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ (5分)

(2) 证明: 由题得 $f(x) = \left| x + \frac{1}{2} \right| - \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right| = 1$,

当且仅当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时取 “=”, 故 $f(x)_{\max} = 1$.

所以 $M = 1$, $m + n = 1$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } (m\sqrt{p} + n\sqrt{q})^2 - (\sqrt{mp + nq})^2 &= m^2p + n^2q + 2mn\sqrt{pq} - mp - nq \\ &= m(m-1)p + n(n-1)q + 2mn\sqrt{pq} = -mnp - mnq + 2mn\sqrt{pq} = -mn(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

所以 $(m\sqrt{p} + n\sqrt{q})^2 \leq (\sqrt{mp + nq})^2$,

故 $m\sqrt{p} + n\sqrt{q} \leq \sqrt{mp + nq}$ (10分)

其他解法: 由柯西不等式得

$$(m\sqrt{p} + n\sqrt{q})^2 = (\sqrt{m}\sqrt{mp} + \sqrt{n}\sqrt{nq})^2 \leq (m+n)(mp+nq) = mp+nq,$$

$$\text{故 } m\sqrt{p} + n\sqrt{q} \leq \sqrt{mp+nq}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

