2021年7月测试

理科数学 参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	A	C	C	D	B	D	A	A	B

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$\frac{\pi}{2}$（或$90°$）

14．1

15．10.5

16．0

三、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）

解析：

（1）在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

$5=1+BC^2+\sqrt{2}BC\Rightarrow BC^2+\sqrt{2}BC-4=0$，

解得$BC=\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………………4分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$ …………………………………………5分

（2）$\because\angle BAD=90°$，$\cos\angle CAD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\sin\angle BCA=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\angle BAC\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\angle BAC-\sin\angle BAC)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ……...6分

在$\triangle ABC$中，$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$，

$\therefore AC=\frac{AB\cdot\sin\angle ABC}{\sin\angle BCA}=\sqrt{5}$，

$\therefore\triangle ACD$中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD$，$13=5+AD^2-2AD$，

$\therefore AD=4$ ………………………………………………………………………………10分

18．（12分）

解析：

（1）男生人数为：$120\times\frac{11}{11+13}=55$，所以女生人数为$120-55=65$，

于是可完成2×2列联表，如下：

	了解	不了解	总计
男生	30	25	55
女生	40	25	65
合计	70	50	120

…………………………………...……………3 分

根据列联表中的数据，得到k^2的观测值：

$$k^2=\frac{120\times(30\times 25-25\times 40)^2}{55\times 65\times 50\times 70}=\frac{600}{1001}\approx 0.599<2.706,$$

所以没有 90% 的把握认为“精准脱贫政策了解与性别有关”……………….…..6 分

（2）根据分层抽样比例关系可知男生抽$7\times\frac{30}{70}=3$人，女生抽 4 人……………………7 分

依题可知ξ的可能取值为0，1，2，3，并且ξ服从超几何分布，

$$P(\xi=k)=\frac{C_4^kC_3^{3-k}}{C_7^3}(k=0,1,2,3),$$

即$P(\xi=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$…………………………………...………10 分

可得分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

可得$E(\xi)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$……………………………………...…12 分

19．（12 分）

解析：

（1）$\because S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，

$\therefore S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，

$\therefore a_{n+1}=2a_n+1$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

又$\because a_1=1$，$\therefore a_1+1=2$，

$\therefore \{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列……………………………………………6分

（2）由（1）知$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

$\therefore a_n=2^n-1$，

$\therefore \dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\cdot\left(2^{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

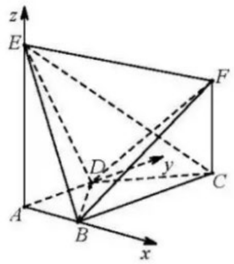
$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<1$，

$\therefore T_n<1$成立…………………………………………………………..…………………...…12分

20.（12分）

解析：

由题意，可以建立以A为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$的方向为x轴，y轴，z轴正方向的空间直角坐标系（如图），



可得$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，

设$CF=h\left(h>0\right)$，

则$F\left(1,2,h\right)$…………………………..……………………………3分

（1）证明：依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的法向量，

又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线$BF\not\subset$平面ADE，$\therefore BF\,//$平面ADE……………………………………..………6分

（2）依题意，$\overrightarrow{BD}=\left(-1,1,0\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,2,h\right)$，

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面BDF的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$

不妨令$y=1$，可得$\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$，$\overrightarrow{EB}=\left(1,0,-2\right)$，$\overrightarrow{ED}=\left(0,1,-2\right)$

设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 EBD 的法向量，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，得：$\begin{cases}x_1-2z_1=0\\ y_1-2z_1=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_1}=(2,2,1)$，

由题意，有 $\cos\left(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n_1}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $h=\dfrac{8}{7}$

所以线段 CF 的长为 $\dfrac{8}{7}$ ……………………………………………………………10 分

$\therefore V_{C-BDF}=V_{F-BDC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BDC}\cdot CF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{8}{7}=\dfrac{8}{21}$ ……………………………12 分

21．（12 分）

解析：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\ln x$，定义域为 $\{x|x>0\}$，

$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x}$ ……………………………………………………………………2 分

令 $h(x)=f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，

$\therefore h'(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(1)=\mathrm{e}^0-1=0$ ……………………………………………………………………4 分

$\therefore x\in(0,1)$，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

$x\in(1,+\infty)$，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

$\therefore f(x)$ 增区间为 $(1,+\infty)$，减区间为 $(0,1)$．

（2）当 $a>0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x\mathrm{e}^{x-1}-a}{x}$，

令 $g(x)=x\mathrm{e}^{x-1}$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}>0$，

$\therefore g(x)=x\mathrm{e}^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 单增，且 $g(x)\in(0,+\infty)$．

因此，存在唯一的 $x_0>0$ 满足 $x_0\mathrm{e}^{x_0-1}=a$，

且当 $0<x<x_0$ 时，$x\mathrm{e}^{x-1}-a<0$，即 $f'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$xe^{x-1}-a>0$，即 $f'(x)>0$.

因此 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值，也是最小值……………………………...…9 分

下证：$f(x_0)\ge a$，即证 $e^{x_0-1}-a\ln x_0\ge a-a\ln a$，

$\because x_0e^{x_0-1}=a$，$\therefore e^{x_0-1}=\dfrac{a}{x_0}$，$x_0-1=\ln a-\ln x_0$，

于是 $e^{x_0-1}-a\ln x_0=\dfrac{a}{x_0}-a(\ln a-x_0+1)=\dfrac{a}{x_0}+ax_0-a-a\ln a$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{x_0}\cdot ax_0}-a-a\ln a=a-a\ln a$，不等式 $f(x)\ge a$ 得证……………………………………12 分

22．（12 分）

解析：

（1）根据椭圆对称性，必过点 A，B，

又 C 纵坐标为 1，椭圆必不过 C，所以过 A，B，D 三点

将 $D(0,\sqrt{3})$，$A(2,1)$ 代入椭圆方程得 $\begin{cases}\dfrac{3}{b^2}=1,\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$

解得：$a^2=6$，$b^2=3$……………………………………………………………………..3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$………………………………………………………..…..4 分

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

若直线 MN 与 x 轴不垂直，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，

代入 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $6k^2-m^2+3>0$

于是 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$ ①………………………………….……………8 分

由 $AM\perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

可得 $(1+k^2)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$，

将①代入上式可得：$(1+k^2)\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}-(km-k-2)\dfrac{4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$，

整理得 $(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，

若 $2k+m-1=0$ 则 MN 的方程为 $y=kx+1-2k$ ，此时直线过点 $(2,1)$ 与点 A 重合，舍去

$\therefore 2k+m-1\neq 0$ ，故 $2k+3m+1=0$ ，此时 $\Delta>0$ ，

于是 MN 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}$ ，

所以直线 MN 过点 $P\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ ……………………………………………………..….11 分

若直线 MN 与 x 轴垂直，可得 $N\left(x_1,-y_1\right)$ ，

由 $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=0$ 得 $\left(x_1-2\right)\left(x_1-2\right)-\left(y_1-1\right)\left(y_1+1\right)=0$ ，

又 $\dfrac{{x_1}^2}{6}+\dfrac{{y_1}^2}{3}=1$，可得 $3{x_1}^2-8x_1+4=0$，

解得 $x_1=2$（舍去），$x_1=\dfrac{2}{3}$，此时直线 MN 过点 $P\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ ……………………….....….12 分