开封市2021届高三第三次模拟考试
文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{1,a\}$，$B=\{-1,-b\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a-b=$

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 0

2. 设复数 z 满足 $|z|=|z-\mathrm{i}|=1$，且 z 的实部大于虚部，则 $z=$

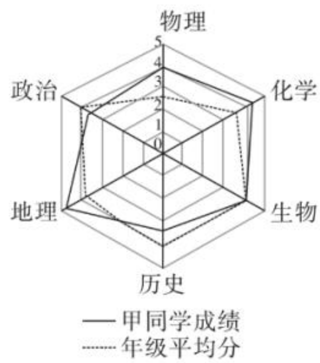
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

3. “方程 $\frac{x^2}{m-1}-\frac{y^2}{m+2}=1$ 表示双曲线”的一个必要不充分条件为

A. $m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B. $m\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $m\in(-\infty,-2)$　　D. $m\in(1,+\infty)$

4. 2021年开始，某省将试行“3＋1＋2”的普通高考新模式，即除语文、数学、外语3门必选科目外，考生再从物理、历史中选1门，从化学、生物、地理、政治中选2门作为选考科目. 为了帮助学生合理选科，某中学将高一每个学生的六门科目综合成绩按比例均缩放成5分制，绘制成雷达图. 甲同学的成绩雷达图如图所示，下面叙述一定不正确的是



A. 甲的物理成绩领先年级平均分最多

B. 甲有2个科目的成绩低于年级平均分

C. 甲的成绩从高到低的前3个科目依次是地理、化学、历史

D. 对甲而言，物理、化学、地理是比较理想的一种选科结果

5. 已知 $\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos2\alpha=$

A. $-\frac{7}{8}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 0

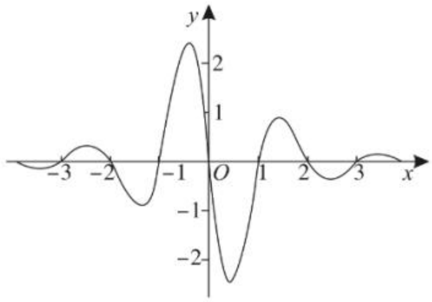
6. 设函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+a}$，若 $f(x)$ 的极小值为 $\sqrt{\mathrm{e}}$，则 $a=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

7. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2}a_n$，若$a_1a_2a_3\cdots a_n=128\sqrt{2}$，则$n=$

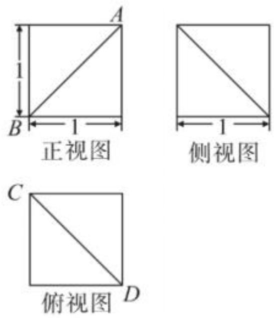
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

8. 已知函数$f(x)=\dfrac{4\cos(\omega x+\varphi)}{e^{|x|}}(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，则$\dfrac{\omega}{\varphi}=$



A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{2}{\pi}$

9. 某几何体的三视图如右图所示，关于该几何体有下述四个结论：



①体积可能是$\dfrac{5}{6}$　　②体积可能是$\dfrac{2}{3}$

③AB 和 CD 在直观图中所对应的棱所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$

④在该几何体的面中，互相平行的面可能有四对

其中所有正确结论的编号是

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①②③④

10. 三人制足球（也称为笼式足球）以其独特的魅力，吸引着中国众多的业余足球爱好者. 在某次三人制足球传球训练中，A 队有甲、乙、丙三名队员参加，甲、乙、丙三人都等可能地将球传给另外两位队友中的一个人. 若由甲开始发球（记为第一次传球），则第四次仍由甲传球的概率是

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

11. 若$2^a=5^b=z^c$，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$，则$z$的值可能为

A. $\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 7　　D. 10

12. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若椭圆$C$上存在一点$P$，使得$\dfrac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\dfrac{c}{a}$，则椭圆$C$的离心率的取值范围为

A. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $(0,\sqrt{2}-1)$　　C. $(\sqrt{2}-1,1)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

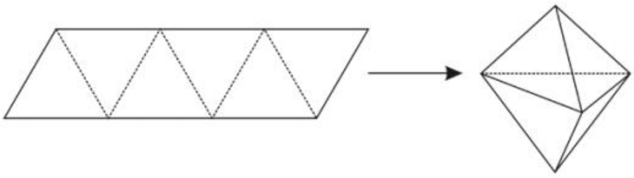
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\{a_n\}$为等差数列，且$3a_5=2a_7$，则$a_1=$______.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(t,2\sqrt{2})$，若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\sqrt{3}$，则实数 $t=$______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $A=\frac{\pi}{3}$，$b+c=\sqrt{6}$，且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

16. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粔，古称"角黍". 如图，是由六个边长为 3 的正三角形构成的平行四边形形状的纸片，某同学将其沿虚线折起来，制作了一个粽子形状的六面体模型，则该六面体的体积为______；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为______.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$，D 为 BC 边上一点，且 $BD=3$.

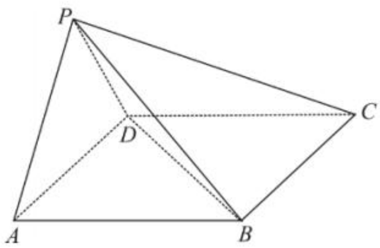
（1）求 AD；

（2）若 $AC=2\sqrt{2}$，求 $\sin C$.

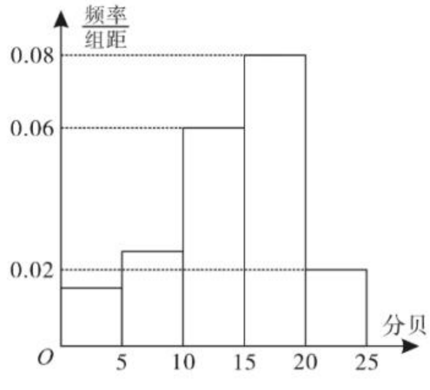
18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.

（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $PA=PD=AB=CD=2$，$\angle APD=90^\circ$，求点 C 到平面 BDP 的距离.



19. 人耳的听力情况可以用电子测听器检测，正常人听力的等级为 0－25dB（分贝），并规定测试值在区间 $(0,5]$ 为非常优秀，测试值在区间 $(5,10]$ 为优秀. 某校 500 名同学参加了听力测试，从中随机抽取了 50 名同学的测试值作为样本，制成如下频率分布直方图：



(1)从总体的 500 名学生中随机抽取 1 人,估计其测试值在区间$(0,10]$内的概率;

(2)已知样本中听力非常优秀的学生有 4 人,估计总体中听力为优秀的学生人数;

(3)现选出一名同学参加另一项测试,测试规则如下:四个音叉的发音情况不同,由强到弱的编号分别为 1,2,3,4. 测试前将音叉顺序随机打乱,被测试的同学依次听完后,将四个音叉按发音由强到弱重新排序,所对应的音叉编号分别为 a_1,a_2,a_3,a_4(其中集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{1,2,3,4\}$). 记 $Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$,可用 Y 描述被测试者的听力偏离程度,求 $Y\leqslant 2$ 的概率.

20. 已知抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,P 是抛物线 C 上一点,且满足 $\overrightarrow{FP}=(0,-2)$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)已知斜率为 2 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,若$|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列,求该数列的公差.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx$ 有两个零点.

(1)求 m 的取值范围;

(2)设 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点,证明:$f'(x_1+x_2)<0$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. 已知在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{3}{1+2\sin^2\theta}$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)设点 $P(0,2)$,若直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A,B,求$|PA|+|PB|$的取值范围.

23. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$,$g(x)=|x-1|$.

(1)求函数 $y=f(x)+g(x)$的最小值;

(2)已知 $\theta\in[0,2\pi)$,求关于 θ 的不等式 $f(\sin\theta)+g(\cos\theta)>\dfrac{5}{2}$的解集.

开封市 2021 届高三第三次模拟考试
数学（文科）参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	C	B	B	C	C	D	A	D	C

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 0　　14. 2　　15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　16. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$，$\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题（共 70 分）

17. 解：(1) 在 ΔABD 中，因为 $AB=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$，$BD=3$，

由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$，…………2 分

$AD^2=2+9-6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$，所以 $AD=\sqrt{5}$. …………6 分

(2) 在 ΔABC 中，因为 $AB=\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，…………8 分

$\frac{\sqrt{2}}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$. …………12 分

18. (1) 证明：由已知 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，得：$AB\perp AP$，$CD\perp PD$，

由 $AB/\!/CD$，故：$CD\perp AP$，又因为 $AP\cap PD=P$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，…………3 分

又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. …………5 分

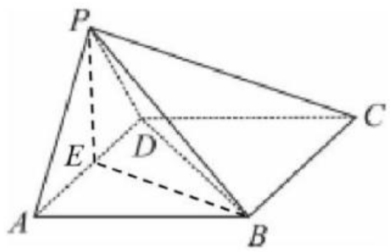
(2) 解：设 E 为 AD 中点，连接 PE，由 $PA=PD$，所以 $PE\perp AD$，

由 (1) 知：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，…………6 分

因为 $AB/\!/CD$，$AB=CD$，所以 $ABCD$ 是平行四边形，

由 (1) 知：$CD\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp AD$，所以 $ABCD$ 是矩形，…………7 分



由 $\angle APD=90^\circ$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，$PE=\sqrt{2}$，

所以 $V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times CB\times CD\right)\times PE$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\right)\times\sqrt{2}=\frac{4}{3}$，…………9 分

连接 EB，在 ΔPEB 中，$EB=\sqrt{6}$，$PE=\sqrt{2}$，所以 $PB=2\sqrt{2}$，

在 ΔPBD 中，$PD=2$，$DB=2\sqrt{3}$，$PB=2\sqrt{2}$，所以 $\angle BPD=90^\circ$，

所以$S_{PBD}=\frac{1}{2}\times PB\times PD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，…………10 分

设点 C 到平面 PBD 的距离为 h，因为$V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，所以$\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}h=\frac{4}{3}$，…………11 分

所以 $h=\sqrt{2}$，所以点 C 到平面 PBD 的距离为$\sqrt{2}$． …………12 分

19．解：（1）根据频率分布直方图可知，

样本中测试值在区间$(0,10]$内的频率为$1-(0.06+0.08+0.02)\times 5=1-0.8=0.2$，…………2 分

以频率视为概率，故从总体的 500 名学生中随机抽取 1 人，估计其测试值在区间$(0,10]$内的概率为0.2．…………3 分

（2）样本中听力为优秀的学生人数为$0.2\times 50-4=6$，…………5 分

所以估计总体中听力为优秀的学生人数为$500\times\frac{6}{50}=60$．…………6 分

（3）当$a_1=1$时，序号a_1,a_2,a_3,a_4的情况为 6 种：分别记为

$(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2)$,

同理，当$a_1=2,3,4$时，序号a_1,a_2,a_3,a_4的情况也分别为 6 种，

所以序号a_1,a_2,a_3,a_4所有的情况总数为24种. …………8 分

当$Y=0$时，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，

当$Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|=2$时，

a_1，a_2，a_3，a_4的取值为$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=3$或$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=2$，$a_4=4$或$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=4$，

所以$Y\le 2$时，序号a_1,a_2,a_3,a_4对应的情况为 4 种，…………11 分

所以$P(Y\le 2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. …………12 分

20．解：（1）由题可知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设点$P(x_0,y_0)$，

因为$\overrightarrow{FP}=(0,-2)$，即$\left(x_0-\frac{p}{2},y_0\right)=(0,-2)$，所以$x_0=\frac{p}{2}$，$y_0=-2$，……………2分

代入$y^2=2px$，得$4=p^2$，又因为$p>0$，所以$p=2$，

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$．……………4分

（2）设直线$l:y=2x+m$，

则$\begin{cases}y=2x+m\\y^2=4x\end{cases}$消去$y$可得$4x^2+(4m-4)x+m^2=0$，

满足$\Delta=(4m-4)^2-16m^2=-32m+16>0$，即$m<\frac{1}{2}$，

设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=1-m$，$x_1x_2=\frac{m^2}{4}$，……………7分

若$\left|\overrightarrow{FA}\right|$，$\left|\overrightarrow{FP}\right|$，$\left|\overrightarrow{FB}\right|$成等差数列，则$\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|=2\left|\overrightarrow{FP}\right|$，

即$x_1+x_2+2=4$，即$3-m=4$，即$m=-1$.　　　　……………9分

此时直线l与抛物线C联立方程为$4x^2-8x+1=0$，

即$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$，又因为公差d满足$2d=\left|\overrightarrow{FB}\right|-\left|\overrightarrow{FA}\right|=x_2-x_1$，……………10分

因为$\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{3}$，

所以$2d=\pm\sqrt{3}$，即$d=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　　　……………12分

21. 解：（1）已知函数$f\left(x\right)=\ln x-mx$有两个零点，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}\left(x>0\right)$，……1 分

①当$m\le 0$时，$f'(x)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，至多有一个零点；…………2 分

②当$m>0$时，$0<x<\dfrac{1}{m}$时，$f'(x)>0$，$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$上单调递增，

$x>\dfrac{1}{m}$时，$f'(x)<0$，$f\left(x\right)$在$\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$上单调递减，

所以，$f\left(x\right)$在$x=\dfrac{1}{m}$处取得最大值，由$f\left(\dfrac{1}{m}\right)=-\ln m-1>0$得$0<m<\dfrac{1}{e}$，…………3 分

此时，$\dfrac{1}{m}>e,1<\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m^2}>\dfrac{1}{m}$，$f\left(1\right)=-m<0$，$f\left(\dfrac{1}{m^2}\right)=-2\ln m-\dfrac{1}{m}<0$，

由零点存在性定理可知，$f\left(x\right)$在$\left(1,\dfrac{1}{m}\right)$和$\left(\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m^2}\right)$上各有一个零点.…………4 分

综上所述，m的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.…………5 分

（2）因为x_1，x_2是$f\left(x\right)$的两个零点，不妨设$x_1>x_2>0$，

所以$\ln x_1-mx_1=0\cdots①,\ln x_2-mx_2=0\cdots②$，…………6 分

①-②得：$\ln x_1-\ln x_2=mx_1-mx_2$，$m=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，…………7 分

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-m$，所以$f'(x_1+x_2)=\dfrac{1}{x_1+x_2}-m=\dfrac{1}{x_1+x_2}-\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

要证$f'(x_1+x_2)<0$即证$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{1}{x_1+x_2}$，即证$\ln x_1-\ln x_2>\dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$，

即证$\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}>0$，即证$\ln\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{2}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}-1>0$，…………9 分

令$\frac{x_1}{x_2}=t>1$，设$\varphi(t)=\ln t+\frac{2}{t+1}-1$，$\varphi'(t)=\frac{t^2+1}{t(t+1)^2}>0$，…………10 分

所以$\varphi(t)$在$t>1$时单调递增，所以$\varphi(t)>\varphi(1)$，$\varphi(1)=0$，所以$\varphi(t)>0$，…………11 分

所以$f'(x_1+x_2)<0$. …………12 分

22．解：（1）曲线 C 的极坐标方程可化为$\rho^2+2\rho^2\sin^2\theta=3$，即$x^2+3y^2=3$，

化简得曲线 C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. …………4 分

（2）联立直线l的参数方程与曲线 C 的直角坐标方程得：$(t\cos\alpha)^2+3(2+t\sin\alpha)^2=3$，

化简得$(1+2\sin^2\alpha)t^2+12t\sin\alpha+9=0$，则$t_1+t_2=-\frac{12\sin\alpha}{1+2\sin^2\alpha}$，$t_1t_2=\frac{9}{1+2\sin^2\alpha}>0$，……6 分

且$\Delta=144\sin^2\alpha-36(1+2\sin^2\alpha)>0$，$2\sin^2\alpha-1>0$，则有$|\sin\alpha|\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，………7 分

则$|PA|+|PB|=|t_1+t_2|=\frac{12|\sin\alpha|}{1+2\sin^2\alpha}$，…………8 分

令$m=|\sin\alpha|\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，有$|PA|+|PB|=\frac{12}{\frac{1}{m}+2m}\in\left[4,3\sqrt{2}\right)$，…………9 分

所以$|PA|+|PB|$的取值范围为$\left[4,3\sqrt{2}\right)$. …………10 分

23．解：（1）由已知可得$y=f(x)+g(x)=|x-\frac{1}{2}|+|x-1|\geq|(x-\frac{1}{2})-(x-1)|=\frac{1}{2}$，

当且仅当$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\leq0$即$\frac{1}{2}\leq x\leq1$时等号成立，

所以函数$y=f(x)+g(x)$的最小值为$\frac{1}{2}$. …………4 分

（2）由已知$\left|\sin\theta-\frac{1}{2}\right|+|\cos\theta-1|>\frac{5}{2}$，原不等式可化为$|\sin\theta-\frac{1}{2}|-\cos\theta>\frac{3}{2}$，…………6 分

当$\sin\theta\geq\frac{1}{2}$时，$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，原不等式化为$\sin\theta-\cos\theta>2$，此时无解，…………7 分

当$\sin\theta<\frac{1}{2}$时，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right)$，原不等式化为$\sin\theta+\cos\theta<-1$，

即$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{5\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$，$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，…………9 分

综上所述，$\theta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$为原不等式的解集. …………10 分

关于我们