

(在此卷上答题无效)

2023年2月福州市普通高中毕业班质量检测

数学试题

(完卷时间 120 分钟;满分 150 分)

友情提示:请将所有答案填写到答题卡上! 请不要错位、越界答题!

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x - 1| \leq 2\}$, $B = \{x \mid 2^x \leq \sqrt{2}\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ B. $\{x \mid -1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$
C. $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$ D. $\{x \mid x \leq 3\}$

2. 已知 $(1+i)z = 2 - 4i$, 则 $|z| =$

- A. 2 B. $\sqrt{10}$ C. 4 D. 10

3. 若二项式 $\left(3x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^n$ 展开式中存在常数项, 则正整数 n 可以是

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 为培养学生“爱读书、读好书、善读书”的良好习惯,某校创建了人文社科类、文学类、自然科学类三个读书社团.甲、乙两位同学各自参加其中一个社团,每位同学参加各个社团的可能性相同,则这两位同学恰好参加同一个社团的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 已知 $|b| = 2|a|$, 若 a 与 b 的夹角为 120° , 则 $2a - b$ 在 b 上的投影向量为

- A. $-3b$ B. $-\frac{3}{2}b$ C. $\frac{1}{2}b$ D. $3b$

6. 已知 $\odot O_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, $\odot O_1$ 关于直线 $ax + 2y + 1 = 0$ 对称的圆记为 $\odot O_2$, 点 E, F 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 上的动点, EF 长度的最小值为 4, 则 $a =$

- A. $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{6}$ B. $-\frac{5}{6}$ 或 $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{5}{6}$ D. $\frac{5}{6}$ 或 $\frac{3}{2}$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA = PB = PC = AB = \sqrt{6}$, $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, 则球 O 的体积为

- A. 3π B. $\frac{27}{8}\pi$ C. $\frac{9}{2}\pi$ D. 9π

8. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 是奇函数, 且 $f(1-x) + g(x) = 2$, $f(x) + g(x-3) = 2$, 则

- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $g(x)$ 为奇函数
C. $\sum_{k=1}^{20} f(k) = 40$ D. $\sum_{k=1}^{20} g(k) = 40$

高三数学 — 1 — (共 4 页)



一、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，则

A. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 单调递增

B. $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 有两个零点

C. 直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. 直线 $y = 4x + \frac{2\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

10. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2m^2 - 4} = 1$.

若 $m > \sqrt{2}$ ，则 C 是椭圆

B. 若 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ ，则 C 是双曲线

C. 当 C 是椭圆时，若 $|m|$ 越大，则 C 越接近于圆

D. 当 C 是双曲线时，若 $|m|$ 越小，则 C 的张口越大

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为棱 BC, CC_1 的中点， P 为线段 EF 上的动点，则

A. 线段 DP 长度的最小值为 2

B. 三棱锥 $D - A_1AP$ 的体积为定值

C. 平面 AEF 截正方体所得截面为梯形

D. 直线 DP 与 AA_1 所成角的大小可能为 $\frac{\pi}{3}$

12. 若 x, y 满足 $x^2 + xy + y^2 = 3$ ，则

A. $2x + y \leq 2\sqrt{3}$

B. $2x + y \geq -1$

C. $x^2 + y^2 - xy \leq 8$

D. $x^2 + y^2 - xy \geq 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ， α 是第三象限角，则 $\tan 2\alpha =$ _____.

14. 利率变化是影响某金融产品价格的重要因素。经分析师分析，最近利率下调的概率为 60%，利率不变的概率为 40%。根据经验，在利率下调的情况下该金融产品价格上涨的概率为 80%，在利率不变的情况下该金融产品价格上涨的概率为 40%。则该金融产品价格上涨的概率为 _____.

15. 已知曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ 在点 P 处的切线与在点 Q 处的切线平行，若点 P 的纵坐标为 1，则点 Q 的纵坐标为 _____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ ，直线 l 与 C 在第二象限交于 A, B 两点 (A 在 B 的左下方)，与 x 轴， y 轴分别交于点 M, N ，且 $|MA| : |AB| : |BN| = 1 : 2 : 3$ ，则 l 的方程为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $b^2 - a^2 = 2c^2$ 。

(1) 求 $\frac{\tan B}{\tan A}$ 的值；

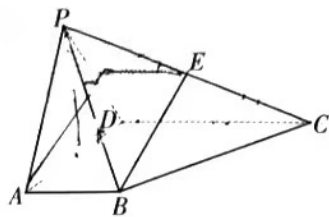
(2) 求 C 的最大值。

18. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp CD$ ， $CD = 2AB = 4$ ， $\triangle PAD$ 是正三角形， E 是棱 PC 的中点。

(1) 证明： $BE \parallel$ 平面 PAD ；

(2) 若 $AD = 2\sqrt{3}$ ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值。



19. (本小题满分 12 分)

欧拉函数 $\varphi(n)$ ($n \in \mathbf{N}^+$) 的函数值等于所有不超过正整数 n ，且与 n 互质的正整数的个数，例如： $\varphi(1) = 1$ ， $\varphi(4) = 2$ 。

(1) 求 $\varphi(3^2)$ ， $\varphi(3^3)$ ；

(2) 令 $a_n = \frac{1}{2}\varphi(3^n)$ ，求数列 $\left\{\frac{\log_3 a_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和。

20. (本小题满分 12 分)

脂肪含量(单位：%)指的是脂肪重量占人体总重量的比例。某运动生理学家在对某项健身活动参与人群的脂肪含量调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样，如果不知道样本数据，只知道抽取了男性 120 位，其平均数和方差分别为 14 和 6，抽取了女性 90 位，其平均数和方差分别为 21 和 17。

(1) 试由这些数据计算出总样本的均值与方差，并对该项健身活动的全体参与者的脂肪含量的均值与方差作出估计。(结果保留整数)

(2) 假设全体参与者的脂肪含量为随机变量 X ，且 $X \sim N(17, \sigma^2)$ ，其中 σ^2 近似为(1)中计算的总样本方差。现从全体参与者中随机抽取 3 位，求 3 位参与者的脂肪含量均小于 12.2% 的概率。

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $\sqrt{22} \approx 4.7$ ， $\sqrt{23} \approx 4.8$ ， $0.15865^3 \approx 0.004$ 。

高三数学 — 3 — (共 4 页)

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$, 过点 $(-2, 0)$ 的两条直线 l_1, l_2 分别交 E 于 A, B 两点和 C, D 两点. 当 l_1 的斜率为 $\frac{2}{3}$ 时, $|AB| = \sqrt{13}$.

(1) 求 E 的标准方程;

(2) 设 G 为直线 AD 与 BC 的交点, 证明: 点 G 必在定直线上.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + a$.

(1) 若 $a = 2$, 试判断 $f(x)$ 的单调性, 并证明你的结论;

(2) 若 $x > 1$, $f(x) > 0$ 恒成立.

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

求 $[10a_n]$. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线